STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE FRATTA

Esempio B: $$\mathbf{y = \frac{4}{x^2 - 4}}$$

1) Classificazione e C.E.

Funzione algebrica razionale fratta di terzo grado,

C.E.: $\forall x \in \Re - \{\pm 2\}$, ossia $]-\infty; -2[\cup]-2; 2[\cup]2; +\infty[$

2) Simmetrie

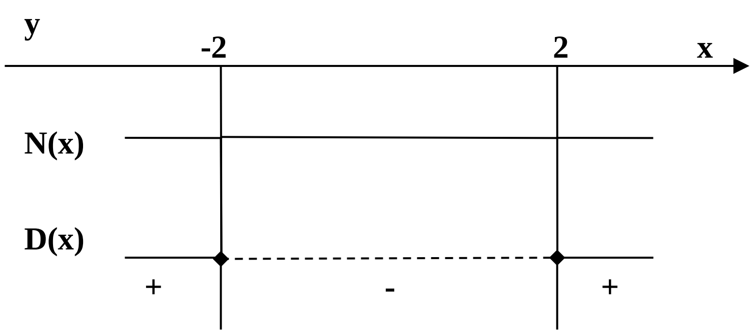
La funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, cioè è pari perché si verifica la condizione $f(x) = f(-x)$. Ad esempio $P\left(3; \frac{4}{5}\right)$ e $P'\left(-3; \frac{4}{5}\right)$ sono una coppia di punti simmetrici.

3) Studio del segno

Si pone: $\frac{4}{x^2 - 4} > 0$ ossia:

$\mathbf{N(x): 4 > 0}$ **sempre**

$\mathbf{D(x): x^2 - 4 > 0 \rightarrow x < -2 \wedge x > 2}$



La funzione è positiva per $\mathbf{x < -2}$ e per $\mathbf{x > 2}$, è negativa per $\mathbf{-2 < x < 2}$, inoltre, non esiste per $\mathbf{x \pm 2}$,per questi valori la curva presenta due punti di discontinuità di seconda specie.

4) <u>Intersezione con gli assi cartesiani</u>

La funzione data non interseca l'asse $\mathbf{x}$, ma interseca l'asse delle ordinate nel punto $\mathbf{A(0;-1)}$.

5) <u>Asintoti</u>

La funzione ha tre asintoti: due verticali ed uno orizzontale, infatti:

sapendo che $\mathbf{\lim_{x\to -2^-} \frac{4}{x^2-4} = +\infty}$ e $\mathbf{\lim_{x\to -2^+} \frac{4}{x^2-4} = -\infty}$ allora $\mathbf{x = -2}$ è l'equazione del primo asintoto verticale, ovviamente, essendo una funzione pari, l'altro asintoto verticale ha equazione $\mathbf{x = 2}$.

Inoltre, $\lim_{x\to+\infty} \frac{4}{x^2-4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4}{x^2-4} = 0^+$, quindi la funzione data è asintotica all'asse $\mathbf{x}$.

6) <u>Crescenza e/o decrescenza</u>

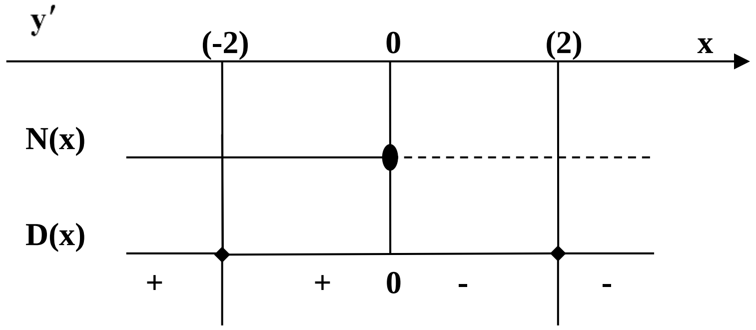
Calcolando la derivata prima si ha:

$$\mathbf{y' = \frac{-8x}{\left(x^2-4\right)^2}},$$

studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$\mathbf{N(x): -8x \geq 0 \rightarrow x \leq 0}$

$\mathbf{D(x): \left(x^2-4\right)^2 > 0 \;\; sempre \;\; nel \;\; C.E.}$



pertanto, essendo la derivata prima positiva per $x < -2 \wedge -2 < x < 0$, la funzione data è ivi crescente, mentre, essendo la derivata prima negativa per $0 < x < 2 \wedge x > 2$, la funzione è ivi decrescente, infine, la derivata prima è nulla per $x = 0$.

7) **<u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u> (Punti stazionari)**

La funzione data ha un massimante nel punto di ascissa $x = 0$, quindi, essendo $f(0) = -1$, la funzione presenta un massimo relativo nel punto $A(0;-1)$.

8) **<u>Concavità e/o convessità</u>**

Calcolando la derivata seconda si ha:

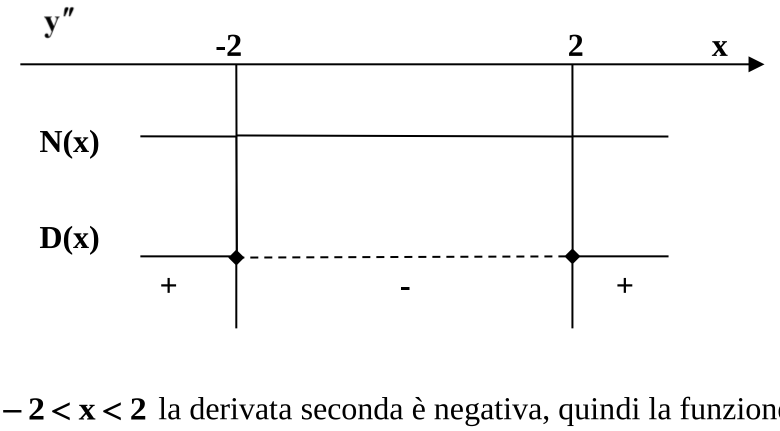
$$y'' = \frac{-8(x^2-4)^2 + 8x\left(4x^3 - 16x\right)}{\left(x^2-4\right)^4}, \text{ cioè } y'' = \frac{-8(x^2-4)^2 + 32x^2\left(x^2-4\right)}{\left(x^2-4\right)^4} \text{ ossia}$$

$$y'' = \frac{8(x^2-4)\left[-\left(x^2-4\right) + 4x^2\right]}{\left(x^2-4\right)^4}, \text{ semplificando si ha: } y'' = \frac{8\left(3x^2+4\right)}{\left(x^2-4\right)^3}.$$

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene:

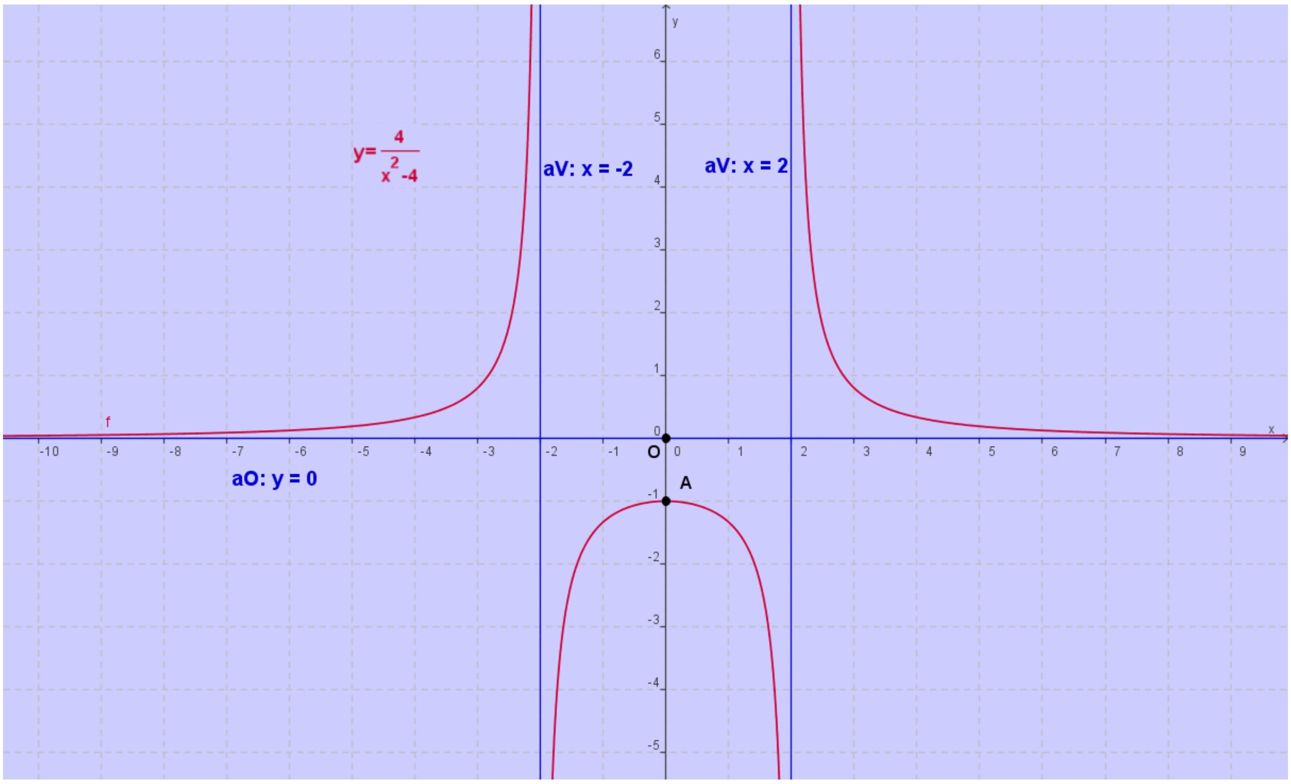
$N(x): 8\left(3x^2+4\right) > 0 \quad \forall x \in \Re$

$D(x): \left(x^2-4\right)^3 > 0 \rightarrow x^2 - 4 > 0 \rightarrow x < -2 \wedge x > 2.$



pertanto, per $-2 < x < 2$ la derivata seconda è negativa, quindi la funzione data è concava verso il basso, mentre per $x < -2 \wedge x > 2$ la derivata seconda è positiva, quindi la funzione data è concava verso l'alto, inoltre, poiché la derivata seconda non si annulla non ci sono punti d'inflessione.

9) **<u>Grafico</u>**



[Torna su](#)