Analisi

Classe quinta

STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE FRATTA

Esempio C: $$\mathbf{y = \frac{x^3 - 1}{x}}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione algebrica razionale fratta di terzo grado,

C.E.: $\forall \mathbf{x} \in \Re - \{0\}$.

2) **Simmetrie** :

La funzione non è simmetrica, infatti ponendo $\mathbf{f(x) = \frac{x^3 - 1}{x}}$ si ha che $\mathbf{f(-x) = \frac{x^3 + 1}{x}}$, cioè

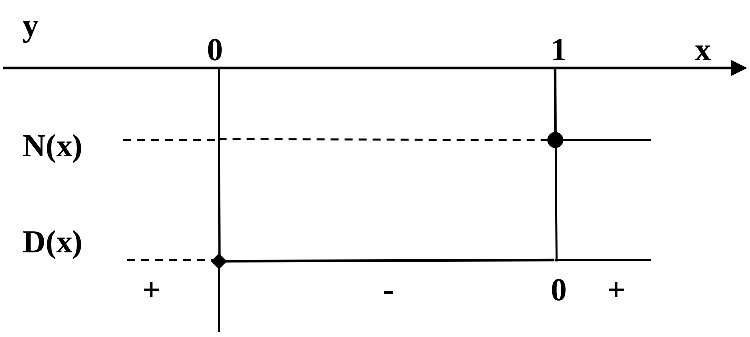
$\mathbf{f(x) = \pm f(-x)}$.

3) **Studio del segno** :

Si pone: $\mathbf{\frac{x^3 - 1}{x} \geq 0}$ ossia:

$$\mathbf{N(x) : x^3 - 1 \geq 0 \rightarrow x - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1}$$

$$\mathbf{D(x) : x > 0}$$



La funzione è positiva per $\mathbf{x<0}$ e per $\mathbf{x>1}$, è negativa per $\mathbf{0<x<1}$, inoltre, è nulla per $\mathbf{x=1}$, mentre non esiste per $\mathbf{x=0}$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

La funzione data interseca l'asse delle ascisse nel punto $\mathbf{A(1;0)}$.

5) **Asintoti** :

La funzione è asintotica all'asse delle ordinate, infatti:

sapendo che $\lim_{x\to 0^-}\frac{x^3-1}{x}=+\infty$ e $\lim_{x\to -0^+}\frac{x^3-1}{x}=-\infty$ allora $\mathbf{x=0}$ è l'equazione dell'asintoto verticale.

Inoltre, $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3-1}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3-1}{x}=+\infty$, e poiché il grado del numeratore è maggiore di due unità rispetto al grado del denominatore, la funzione fratta non può avere né l'asintoto orizzontale né l'asintoto obliquo.

6) **Crescenza o decrescenza** :

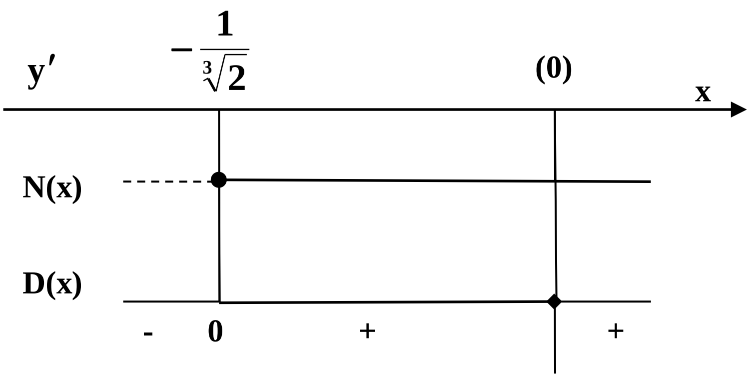
Calcolando la derivata prima si ha:

$$y'=\frac{2x^3+1}{x^2},$$

studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$$N(x): 2x^3+1\ge 0 \to x\ge -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

$$D(x): x^2>0 \ \text{sempre nel C.E.}$$



pertanto, essendo la derivata prima positiva per $-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x < 0 \wedge x > 0$, la funzione data è ivi crescente, mentre, essendo la derivata prima negativa per $x < -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, la funzione è ivi decrescente, infine, la derivata prima è nulla per $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$.

7) <u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u> :

La funzione data ha un minimante nel punto di ascissa $x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$, quindi, essendo $f\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) = \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}$, la funzione presenta un minimo relativo nel punto $B\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}}; \frac{3\sqrt[3]{2}}{2}\right)$.

8) <u>Concavità e convessità</u> :

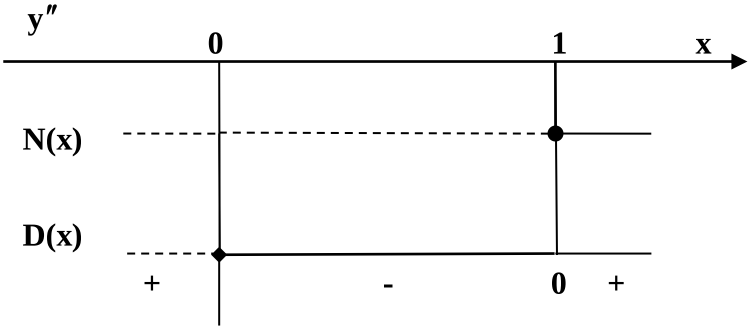
Calcolando la derivata seconda si ha:

$$y'' = \frac{2(x^3 - 1)}{x^3}.$$

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene:

$$N(x): x^3 - 1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$D(x): x^3 > 0 \rightarrow x > 0$$

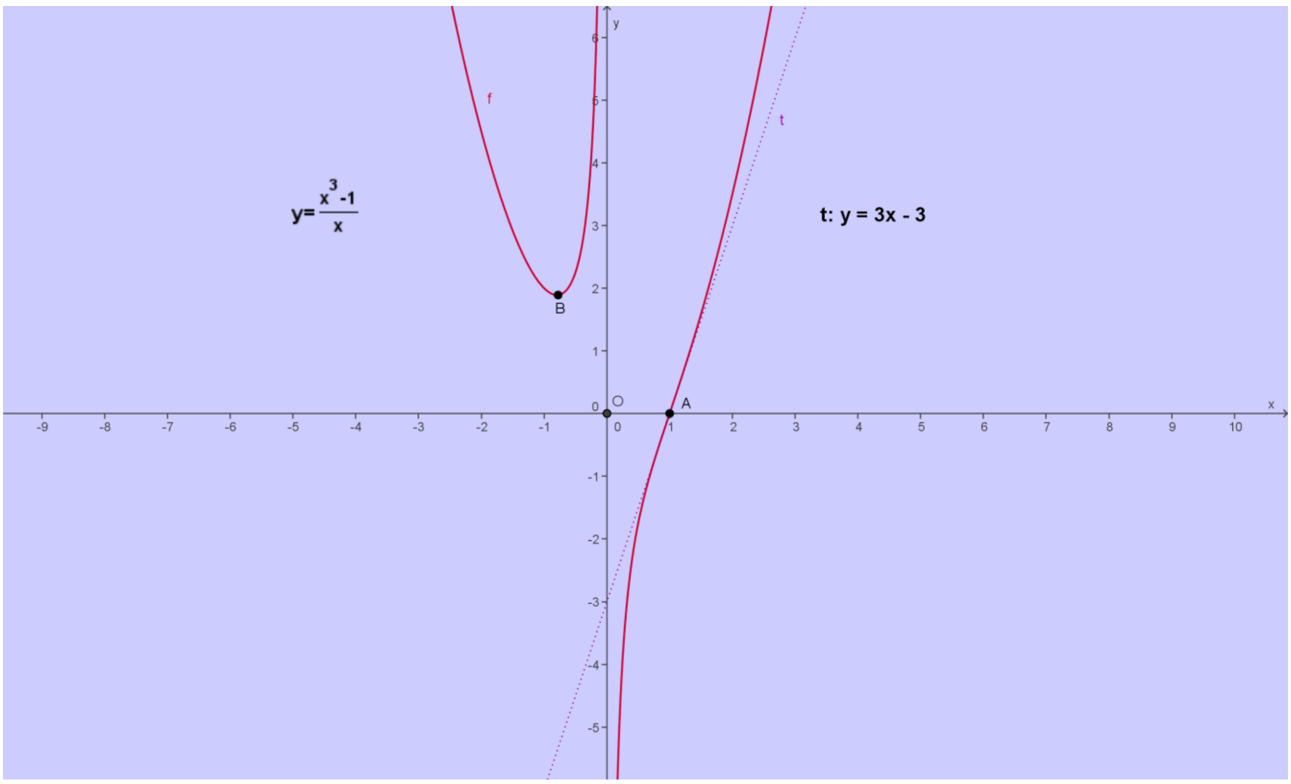


pertanto, per $0 < x < 1$ la $f''(x)$ è negativa, quindi la $f(x)$ è convessa (verso l'alto), mentre per $x < 0 \wedge x > 1$ la $f''(x)$ è positiva, quindi la $f(x)$ è concava (verso l'alto), inoltre, si annulla per $x = 1$.

9) **Flessi a tangente obliqua** :

La funzione data presenta un punto di flesso nel punto $A(1;0)$, inoltre essendo $f'(1) = 3 > 0$, il flesso è ascendente, per determinare l'equazione della tangente obliqua si utilizza la seguente formula: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ dove $x_0 = 1$. Pertanto, si ottiene: $y - 0 = 3(x - 1)$, ossia l'equazione della tangente obliqua nel punto $A(1;0)$ è: $y = 3x - 3$.

10) **Grafico** :



Torna su