STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE FRATTA

Esempio D: $$y = \frac{2x^3}{x^3 - 1}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione algebrica razionale fratta di quarto grado,

C.E.: $\forall x \in \Re - \{1\}$.

2) **Simmetrie** :

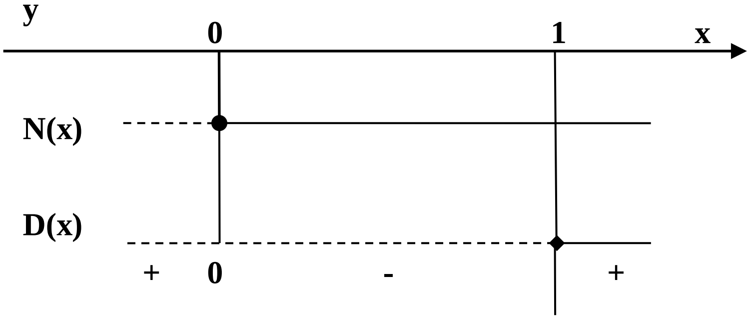
La funzione non è simmetrica, infatti ponendo $f(x) = \frac{2x^3}{x^3 - 1}$ si ha che $f(-x) = \frac{2x^3}{x^3 + 1}$, cioè $f(x) = \pm f(-x)$.

3) **Studio del segno** :

Si pone: $\frac{2x^3}{x^3 - 1} \geq 0$ ossia:

$$N(x): x^3 \geq 0 \rightarrow x \geq 0$$

$$D(x): x^3 - 1 > 0 \rightarrow x > 1$$



La funzione è positiva per $x<0$ e per $x>1$, è negativa per $0<x<1$, inoltre, è nulla per $x=0$, mentre non esiste per $x=1$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

La funzione data passa per l'origine degli assi cartesiani.

5) **Asintoti** :

La funzione ha un asintoto verticale, infatti:

sapendo che $\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^3}{x^3-1}=-\infty$ e $\lim_{x\to -1^+}\frac{2x^3}{x^3-1}=+\infty$ allora $x=1$ è l'equazione dell'asintoto verticale.

Inoltre, $\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^3}{x^3}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^3}{x^3}=2$, quindi la funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y=2$.

6) **Crescenza o decrescenza** :

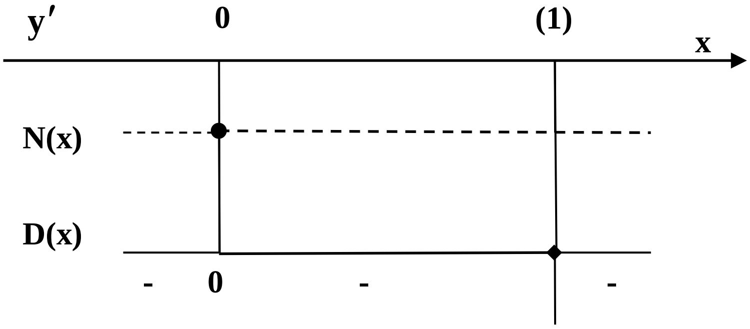
Calcolando la derivata prima si ha:

$$y'=-\frac{6x^2}{(x^3-1)^2},$$

studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$$N(x): -x^2\geq 0 \to \text{mai tranne che per } x=0$$

$$D(x): (x^3-1)^2>0 \text{ sempre nel C.E.}$$



pertanto, essendo la derivata prima negativa $\forall \mathbf{x} \in \Re - \{0;1\}$ la funzione data è decrescente per $\forall \mathbf{x} \in \Re - \{0;1\}$, mentre, la derivata prima è nulla per $\mathbf{x = 0}$ e non esiste per $\mathbf{x = 1}$.

7) **<u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u>** :

La funzione data presenta un punto di flesso discendente a tangente orizzontale nell'origine degli assi cartesiani.

8) **<u>Concavità e convessità</u>** :

Calcolando la derivata seconda si ha:

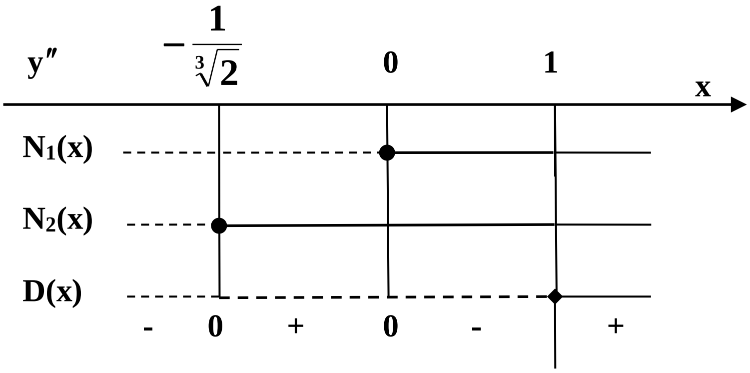
$$\mathbf{y'' = \frac{12x(2x^3 + 1)}{(x^3 - 1)^3}}.$$

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene:

$$\mathbf{N_1(x) : 12x \geq 0 \rightarrow x \geq 0}$$

$$\mathbf{N_2(x) : 2x^3 + 1 \geq 0 \rightarrow x \geq -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$$

$$\mathbf{D(x) : (x^3 - 1)^3 > 0 \rightarrow x - 1 > 0 \rightarrow x > 1}$$

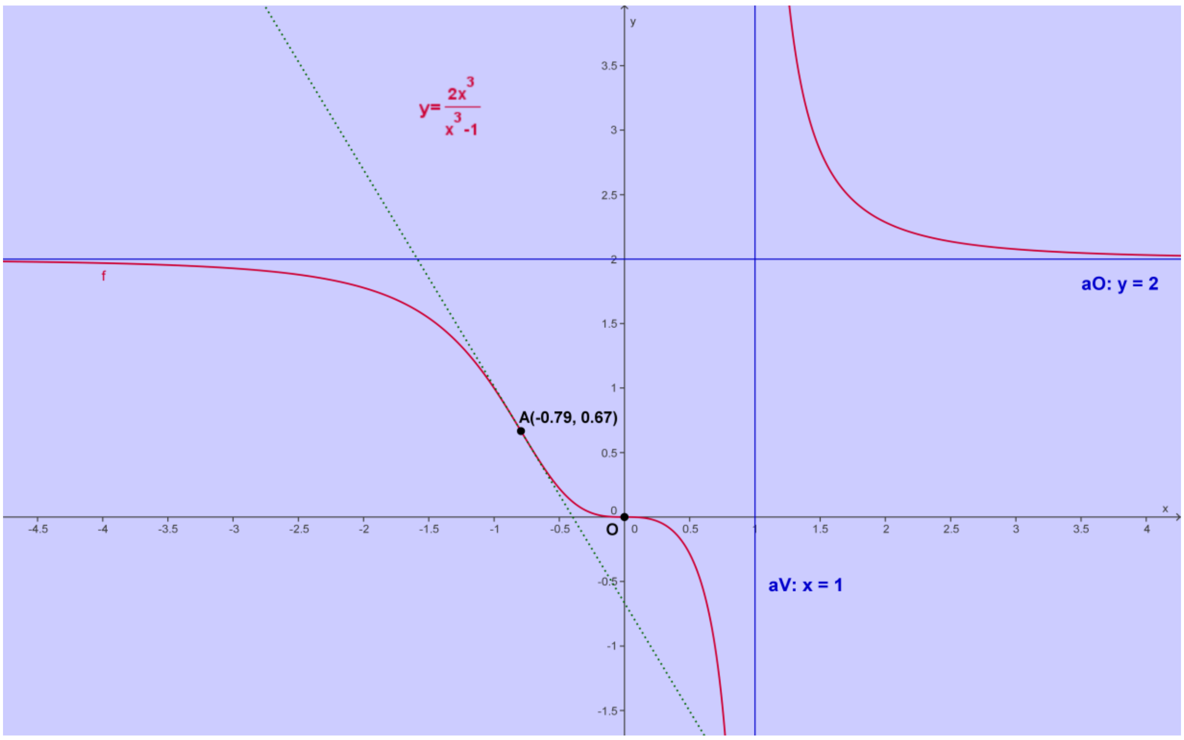


pertanto, per $\mathbf{x < -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$ e per $\mathbf{0 < x < 1}$ la $\mathbf{f''(x)}$ è negativa, quindi la $\mathbf{f(x)}$ è concava verso il basso, mentre per $\mathbf{-\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < x < 0}$ e per $\mathbf{x > 1}$ la $\mathbf{f''(x)}$ è positiva, quindi la $\mathbf{f(x)}$ è concava verso l'alto, inoltre, si annulla per $\mathbf{x = -\frac{1}{\sqrt[3]{2}}}$ e per $\mathbf{x = 0}$, infine non esiste per $\mathbf{x = 1}$.

9) **Flessi a tangente obliqua** :

La funzione data presenta, oltre il punto di flesso a tangente orizzontale nell'origine degli assi cartesiani, un punto di flesso discendente a tangente obliqua in $\mathbf{A\left(-\frac{1}{\sqrt[3]{2}};\frac{2}{3}\right)}$.

10) **Grafico** :



Torna su