STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE FRATTA

Esempio E: $$y = \frac{1-x^2}{x^2-3x}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione algebrica razionale fratta di terzo grado,

C.E.: $\forall x \in \Re - \{0;3\}$.

2) **Simmetrie** :

La funzione non è simmetrica, infatti ponendo $f(x) = \frac{1-x^2}{x^2-3x}$ si ha che $f(-x) = \frac{1-x^2}{x^2+3x}$

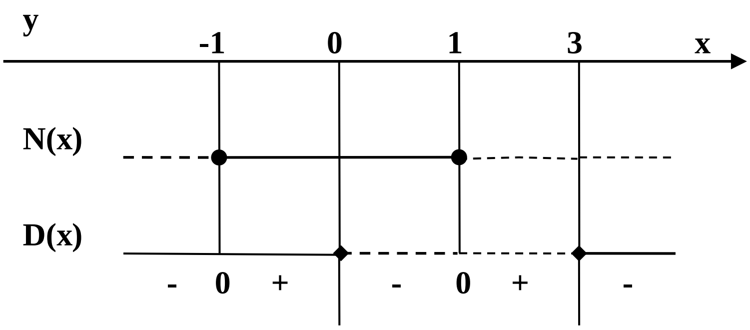
cioè $f(x) \neq \pm f(-x)$.

3) **Studio del segno** :

Si pone: $\frac{1-x^2}{x^2-3x} \geq 0$ ossia:

$$N(x): 1-x^2 \geq 0 \rightarrow x^2-1 \leq 0 \rightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$D(x): x^2-3x > 0 \rightarrow x < 0, x > 3$$



La funzione è positiva per $-1<x<0$ e per $1<x<3$, è negativa per $x<-1$, per $0<x<1$ e per $x>3$, inoltre, è nulla per $x=\pm1$ e non esiste per $x=0$ e per $x=3$.

4) **<u>Intersezione con gli assi cartesiani</u>** :

La funzione data interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(-1;0)$ e $B(1;0)$.

5) **<u>Asintoti</u>** :

La funzione ha tre asintoti: due verticali ed uno orizzontale, infatti:

sapendo che $\lim_{x\to0^-}\frac{1-x^2}{x^2-3x}=+\infty$ e $\lim_{x\to0^+}\frac{1-x^2}{x^2-3x}=-\infty$ allora $x=0$ è l'equazione del primo asintoto verticale, ossia la funzione è asintotica all'asse delle ordinate, inoltre, sapendo che $\lim_{x\to3^-}\frac{1-x^2}{x^2-3x}=+\infty$ e $\lim_{x\to3^+}\frac{1-x^2}{x^2-3x}=-\infty$ allora $x=3$ è l'equazione del secondo asintoto verticale.

Infine, $\lim_{x\to+\infty}\frac{1-x^2}{x^2-3x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1-x^2}{x^2-3x}=-1$, quindi la funzione data è asintotica alla retta orizzontale di equazione $y=-1$.

6) **<u>Crescenza o decrescenza</u>** :

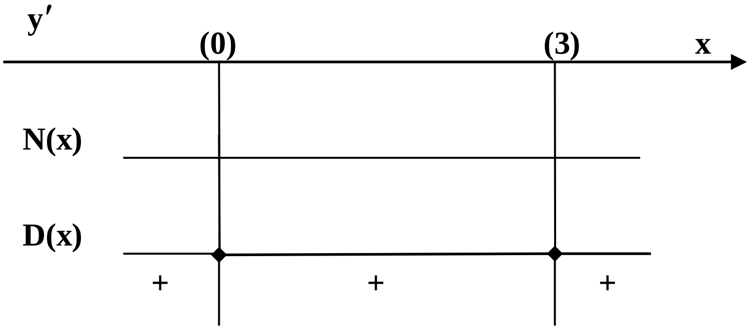
Calcolando la derivata prima si ha:

$$y'=\frac{3x^2-2x+3}{\left(x^2-3x\right)^2},$$

studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$$N(x): 3x^2-2x+3>0\ \ \forall x\in\Re$$

$$D(x): \left(x^2-3x\right)^2>0\ \ \forall x\in\Re-\{0;3\}$$



pertanto, essendo la derivata prima sempre positiva nel campo di esistenza la funzione data è sempre crescente dove è definita.

7) <u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u> :

La funzione data non ha estremanti, poiché la derivata prima non si annulla mai.

8) <u>Concavità e convessità</u> :

Calcolando la derivata seconda si ha:

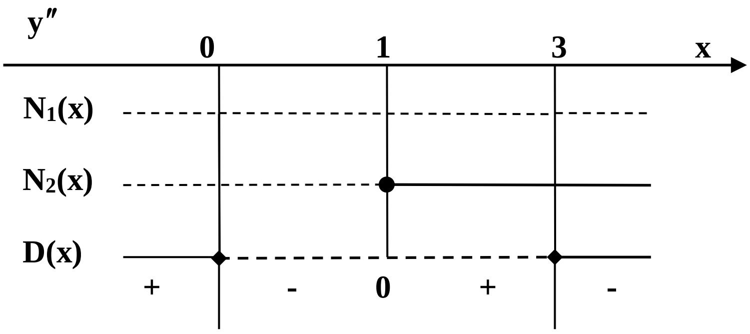
$$y'' = \frac{-6(x^2+3)(x-1)}{\left(x^2-3x\right)^3}.$$

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene:

$$N_1(x): -6(x^2+3) < 0 \quad \forall x \in \Re$$

$$N_2(x): x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$

$$D(x): \left(x^2-3x\right)^3 > 0 \rightarrow x^2-3x > 0 \rightarrow x < 0 \wedge x > 3.$$

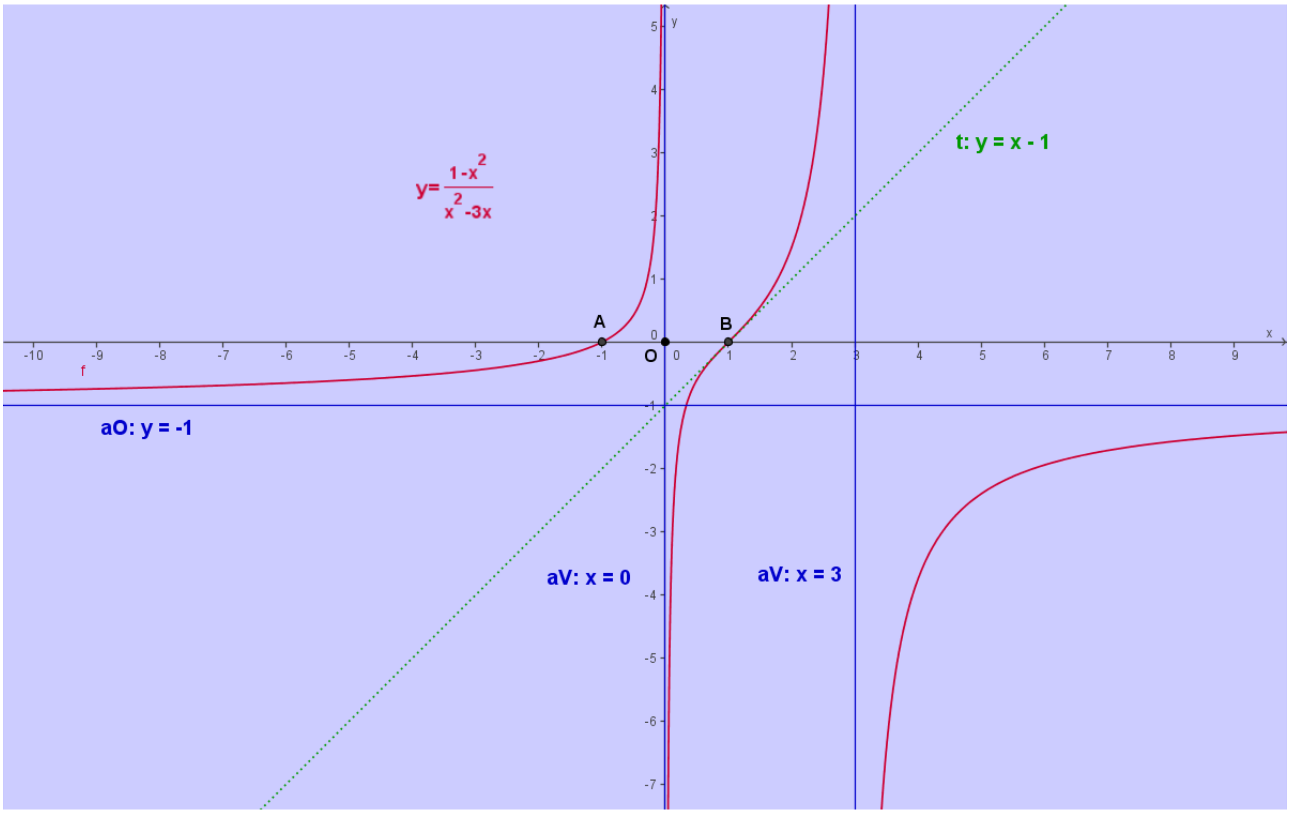


pertanto, per $0 < x < 1$ e per $x > 3$ la derivata seconda è negativa, quindi la funzione data è concava verso il basso in questi intervalli, mentre per $x < 0$ e per $1 < x < 3$ la derivata seconda è positiva, quindi la funzione data volge la concavità verso l'alto, inoltre, la derivata seconda si annulla per $x = 1$.

9) **<u>Flessi a tangente obliqua</u>** :

La funzione data presenta un punto di flesso a tangente obliqua nel punto $B(1;0)$, inoltre essendo $f'(1) = 1 > 0$, il flesso è ascendente, per determinare l'equazione della tangente obliqua si utilizza la seguente formula: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ dove $x_0 = 1$. Pertanto, si ottiene: $y - 0 = 1(x - 1)$, ossia l'equazione della tangente obliqua nel punto $B(1;0)$ è: $t: y = x - 1$.

10) **<u>Grafico</u>** :



Torna su