[Analisi]

[Classe quinta]

STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE FRATTA

Esempio F: $$y = \frac{1+x}{1-x}$$

1) Classificazione e C.E.:

Funzione algebrica razionale fratta di secondo grado, omografica.

C.E.: $\forall x \in \Re - \{1\}$.

2) Simmetrie :

La funzione non è simmetrica né rispetto all'asse delle ordinate né rispetto all'origine degli assi cartesiani, infatti ponendo $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ si ha che $f(-x) = \frac{1-x}{1+x}$ cioè $f(x) \neq \pm f(-x)$.

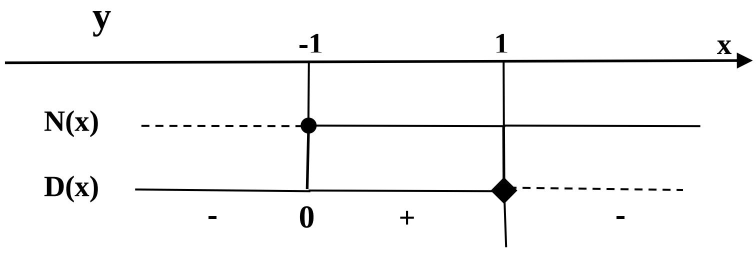
[Si osserva, per curiosità, che $f(-x) = \frac{1}{f(x)} = f^{-1}(x)$].

3) Studio del segno :

Si pone: $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ ossia:

$$N(x): 1+x \geq 0 \rightarrow x \geq -1$$

$$D(x): 1-x > 0 \rightarrow x < 1$$



La funzione è positiva per $-1 < x < 1$, mentre è negativa per $x < -1$ e per $x > 1$, inoltre, è nulla per $x = -1$ e non esiste per $x = 1$.

4) Intersezione con gli assi cartesiani :

$$\cap_x \begin{cases} y = \dfrac{1+x}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} 1+x=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

ossia interseca l'asse delle ascisse nel punto $\mathbf{A(-1;0)}$.

$$\cap_y \begin{cases} y = \dfrac{1+x}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=1 \\ x=0 \end{cases}$$

ossia interseca l'asse delle ordinate nel punto $\mathbf{B(0;1)}$.

5) Asintoti :

La funzione omografica ha due asintoti: uno verticale ed uno orizzontale, infatti:

sapendo che $\lim_{x\to 1^-} \dfrac{1+x}{1-x} = +\infty$ e $\lim_{x\to 1^+} \dfrac{1+x}{1-x} = -\infty$ allora $x=1$ è l'equazione dell' asintoto verticale.

Inoltre, $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{\infty}{\infty}$, forma d'indecisione.

Pertanto, $\lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1+x}{1-x} \overset{H}{=} \lim_{x\to\pm\infty} \dfrac{1}{-1} = -1$ quindi la funzione data è asintotica alla retta orizzontale di equazione $y=-1$.

6) Crescenza o decrescenza :

Calcolando la derivata prima si ha: $y' = \dfrac{2}{(1-x)^2}$,

studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$$\frac{2}{(1-x)^2} > 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): 2 > 0 \rightarrow \forall x \\ D(x): (1-x)^2 > 0 \rightarrow \forall x \text{ del C.E.} \end{array} \right.$$

pertanto, essendo la derivata prima sempre positiva nel campo di esistenza la funzione data è sempre crescente dove è definita.

7) Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale :

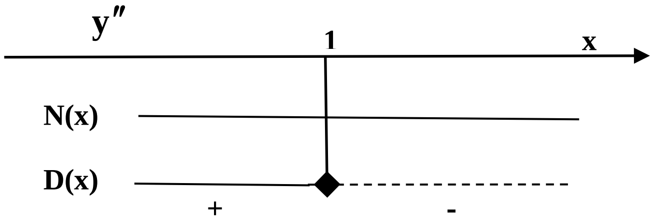
La funzione data non ha estremanti, poiché la derivata prima non si annulla mai.

8) **Concavità e convessità** :

Calcolando la derivata seconda si ha: $y'' = \dfrac{4}{(1-x)^3}$.

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene:

$$\frac{4}{(1-x)^3} > 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): 4 > 0 \rightarrow \forall x \\ D(x): (1-x)^3 > 0 \rightarrow 1 - x > 0 \rightarrow x < 1 \end{array} \right.$$

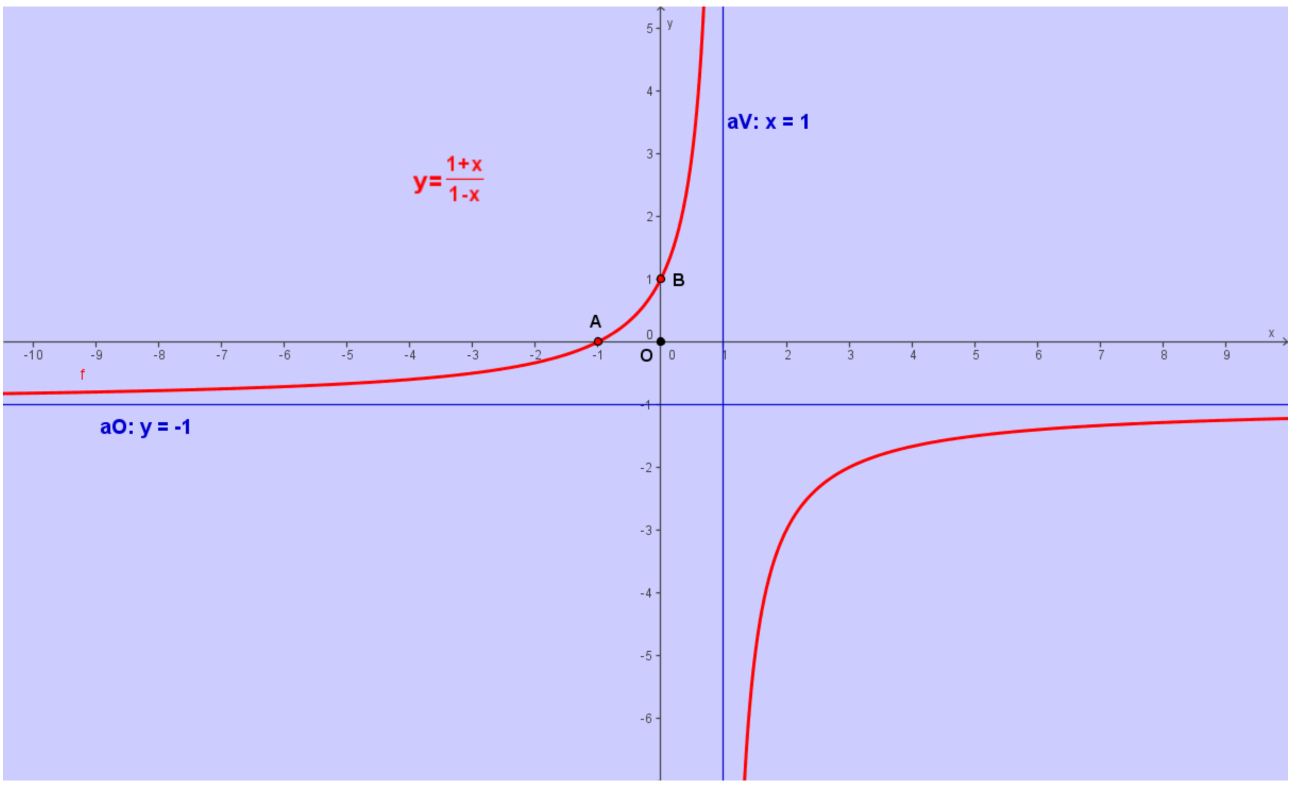


pertanto, per $x > 1$ la y'' è negativa, quindi la y è concava verso il basso in $]1;+\infty[$, mentre per $x < 1$ la y'' è positiva, quindi la y volge la concavità verso l'alto in $]-\infty;1[$.

9) **Flessi a tangente obliqua** :

La funzione data non presenta punti di flesso.

10) **Grafico** :



Torna su