STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE FRATTA

Esempio G**:**

$$y = \frac{x}{x^2 - 1}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione algebrica razionale fratta di terzo grado,

C.E.: $\forall x \in \Re - \{\pm 1\}$ simbologia insiemistica

$]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$ simbologia topologica

2) **Simmetrie**:

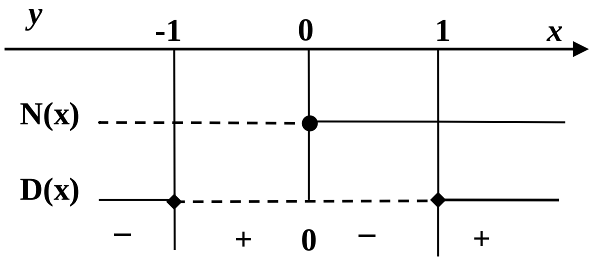
La funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, cioè è dispari perché si verifica la condizione $f(x) = -f(-x)$, infatti ponendo $f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$ si ha che $f(-x) = -\frac{x}{x^2 - 1}$.

3) **Studio del segno**:

Si pone: $\frac{x}{x^2 - 1} \geq 0$ ossia:

$N(x): x \geq 0$

$D(x): x^2 - 1 > 0 \rightarrow x < -1 \wedge x > 1$



La funzione è positiva per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$, è negativa per $x < -1$ e per $0 < x < 1$, inoltre, è nulla per $x = 0$ mentre non esiste per $x \pm 1$.

4) <u>Intersezione con gli assi cartesiani</u>:

$$\cap_y \begin{cases} y = \dfrac{x}{x^2 - 1} \\ x = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow y = 0$$

$$\cap_x \begin{cases} y = \dfrac{x}{x^2 - 1} \\ y = 0 \end{cases} \qquad \rightarrow x = 0$$

La funzione data passa per l'origine degli assi cartesiani.

5) <u>Asintoti</u>:

La funzione ha tre asintoti: due verticali ed uno orizzontale, infatti:

sapendo che $\lim_{x \to -1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{-}{0^+} = -\infty$ e $\lim_{x \to -1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{-}{0^-} = +\infty$ allora $x = -1$ è l'equazione del primo asintoto verticale, ovviamente, essendo una funzione dispari, l'altro asintoto verticale ha equazione $x = 1$, infatti si ha: $\lim_{x \to 1^-} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{+}{0^-} = -\infty$ e $\lim_{x \to 1^+} \dfrac{x}{x^2 - 1} = \dfrac{+}{0^+} = +\infty$

Per determinare l'equazione dell'asintoto orizzontale si calcolano i seguenti limiti:

$\lim_{x \to +\infty} f(x)$ e $\lim_{x \to -\infty} f(x)$

Poiché $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=0^+$

e $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{x}{x^2\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=\lim_{x\to-\infty}\dfrac{1}{x\left(1-\dfrac{1}{x^2}\right)}=0^-$

se ne deduce che la funzione data è asintotica all'asse delle ascisse.

Per determinare l'asintoto orizzontale si può applicare la regola di De L'Hôpital, cioè

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{+\infty}=0^+ \text{ e } \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-1}\overset{H}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{2x}=\frac{1}{-\infty}=0^-$$

Pertanto, l'equazione dell'asintoto orizzontale è $y=0$

6) <u>Crescenza o decrescenza</u>:

Calcolando la derivata prima si ha:

$$y'=\frac{1\bullet(x^2-1)-x\bullet 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2-1-2x^2}{(x^2-1)^2}=\frac{-x^2-1}{(x^2-1)^2}=-\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2},$$

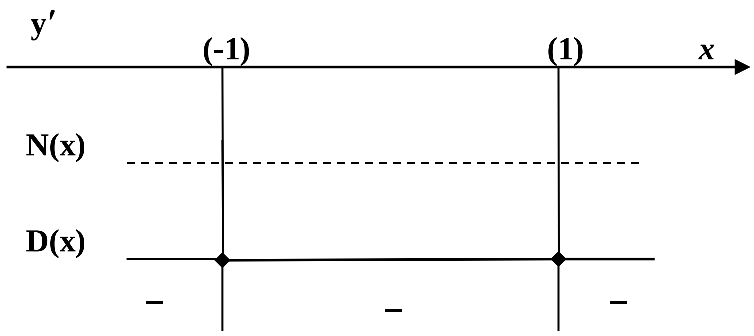
Studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$N(x): -(x^2+1)<0 \ \forall x\in\Re$

il numeratore è sempre negativo per ogni valore dell'asse reale

$D(x): (x^2-1)^2>0 \ \forall x\in\Re-\{\pm1\}$

il denominatore è sempre positivo per ogni valore del dominio



pertanto, essendo la derivata prima sempre negativa nel dominio, la funzione data è sempre decrescente dove è definita.

7) **Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale**:

poiché la derivata prima non si annulla la funzione data non presenta punti stazionari.

8) **Concavità e convessità**:

Calcolando la derivata seconda si ottiene

$y'' = \dfrac{-2x(x^2-1)^2 + (x^2+1)\bullet 2(x^2-1)\bullet 2x}{(x^2-1)^4}$, cioè $y'' = \dfrac{-2x(x^2-1)^2 + 4x(x^2+1)(x^2-1)}{(x^2-1)^4}$ ossia

$y'' = \dfrac{2x(x^2-1)[-(x^2-1)+2(x^2+1)]}{(x^2-1)^4}$, semplificando si ha

$y'' = \dfrac{2x[-(x^2-1)+2(x^2+1)]}{(x^2-1)^3}$, svolgendo i calcoli si ha

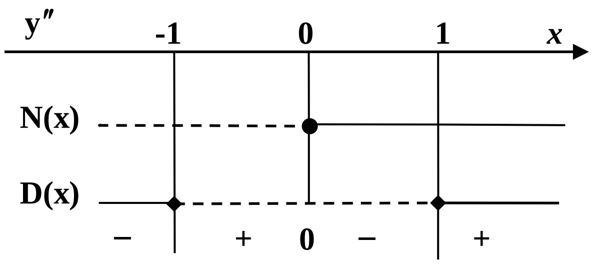
$y'' = \dfrac{2x(-x^2+1+2x^2+2)}{(x^2-1)^3}$, cioè

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene:

$N(x): 2x(x^2+3) \geq 0 \;\rightarrow\; x \geq 0$ ***perchè la quantità*** $2(x^2+3)$ ***è positiva***

$D(x): (x^2-1)^3 > 0 \rightarrow x^2-1 > 0 \rightarrow x < -1 \wedge x > 1.$



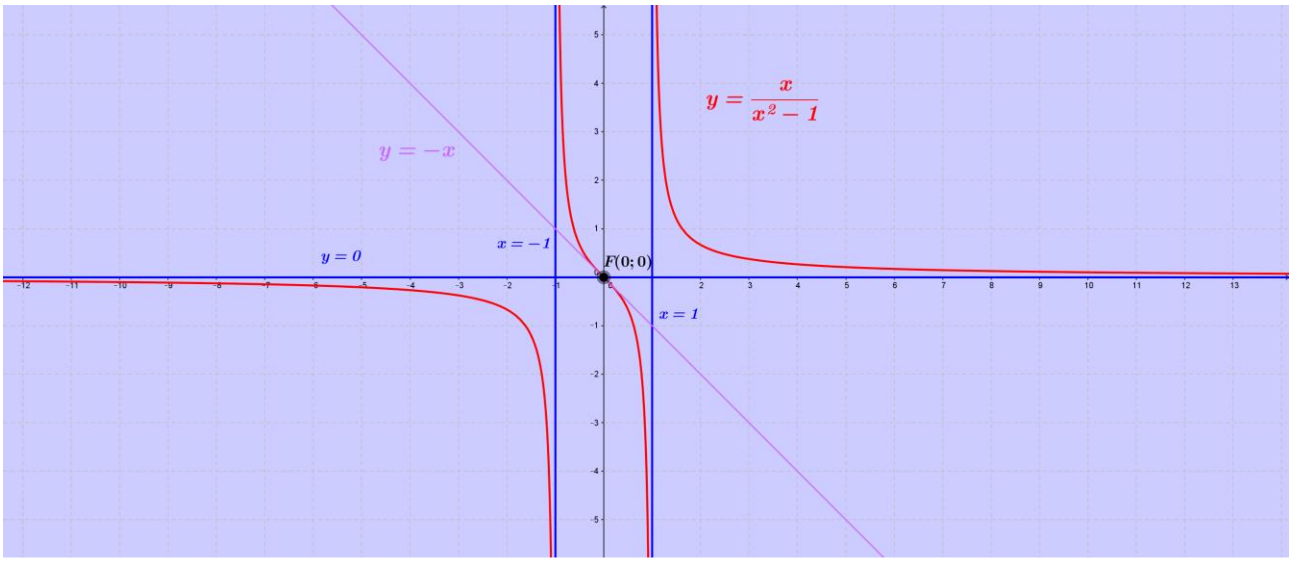
pertanto, per $x < -1$ e per $0 < x < 1$ la derivata seconda è negativa, quindi la funzione data è concava verso il basso, mentre per $-1 < x < 0$ e per $x > 1$ la derivata seconda è positiva, quindi la funzione data è concava verso l'alto, inoltre, la derivata seconda si annulla nell'origine degli assi cartesiani.

9) **Flessi a tangente obliqua**:

La funzione data presenta un punto di flesso discendente a tangente obliqua nell'origine degli assi cartesiani, infatti si osserva che $f''(0)=0$ e $f'(0)=-1<0$.

Per determinare l'equazione della tangente obliqua si utilizza la seguente formula: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$ dove $x_0=0$. Pertanto, si ottiene: $y-0=-1(x-0)$, ossia l'equazione della tangente obliqua nel punto $F(0;0)$ è: $t: y=-x$, cioè la bisettrice del secondo e quarto quadrante.

10) **Grafico**:



Torna su