Analisi

Classe quinta

STUDIO COMPLETO
DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA IRRAZIONALE INTERA

Esempio B: $y = \sqrt{9 - x^2}$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione algebrica irrazionale intera di secondo grado (semicirconferenza).

Affinché si possa estrarre la radice quadrata del secondo membro bisogna porre che il radicando sia maggiore o uguale a zero, ossia $9 - x^2 \geq 0$, pertanto, si ottiene $x^2 - 9 \leq 0$. La disequazione è verificata per $-3 \leq x \leq 3$, quindi il C.E. è $[-3;3]$.

2) **Simmetrie** :

La funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, ossia è una funzione pari, cioè si verifica la relazione che $f(x) = f(-x)$, infatti posto $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ si ha $f(-x) = \sqrt{9 - (-x)^2} = \sqrt{9 - x^2}$.

3) **Studio del segno** :

Si pone: $\sqrt{9 - x^2} \geq 0$ cioè $9 - x^2 \geq 0$, quindi la funzione data è positiva in $]-3;3[$, mentre è nulla per $x = \pm 3$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

La funzione data interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(-3;0)$ e $A'(3;0)$, mentre interseca l'asse delle ordinate nel punto $B(0;3)$.

5) Asintoti :

La funzione data non ammette asintoti.

6) Crescenza o decrescenza :

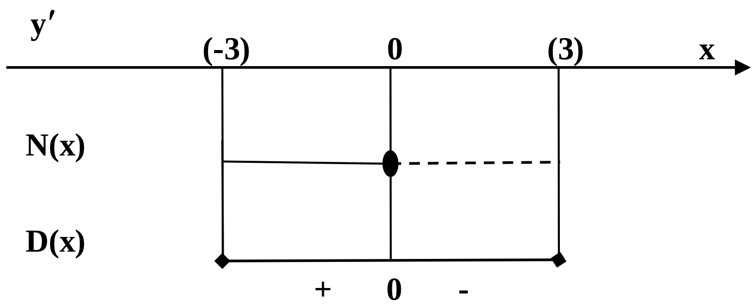
Calcolando la derivata prima si ha:

$$\mathbf{y' = \frac{-x}{\sqrt{9-x^2}}},$$

studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$$\mathbf{N(x): -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0}$$

$$\mathbf{D(x): \sqrt{9-x^2} > 0 \ \text{sempre nel C.E.}}$$



pertanto, essendo la derivata prima positiva per $\mathbf{-3 < x < 0}$, la funzione data è ivi crescente, mentre essendo la derivata prima negativa per $\mathbf{0 < x < 3}$, la funzione data è ivi decrescente. Inoltre, la derivata prima si annulla per $\mathbf{x = 0}$.

7) Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale :

La funzione data ha un massimante nel punto di ascissa $\mathbf{x = 0}$, quindi, essendo $\mathbf{f(0) = 3}$, la funzione presenta un massimo relativo (anche assoluto) nel punto $\mathbf{B(0;3)}$.

8) **Concavità e convessità** :

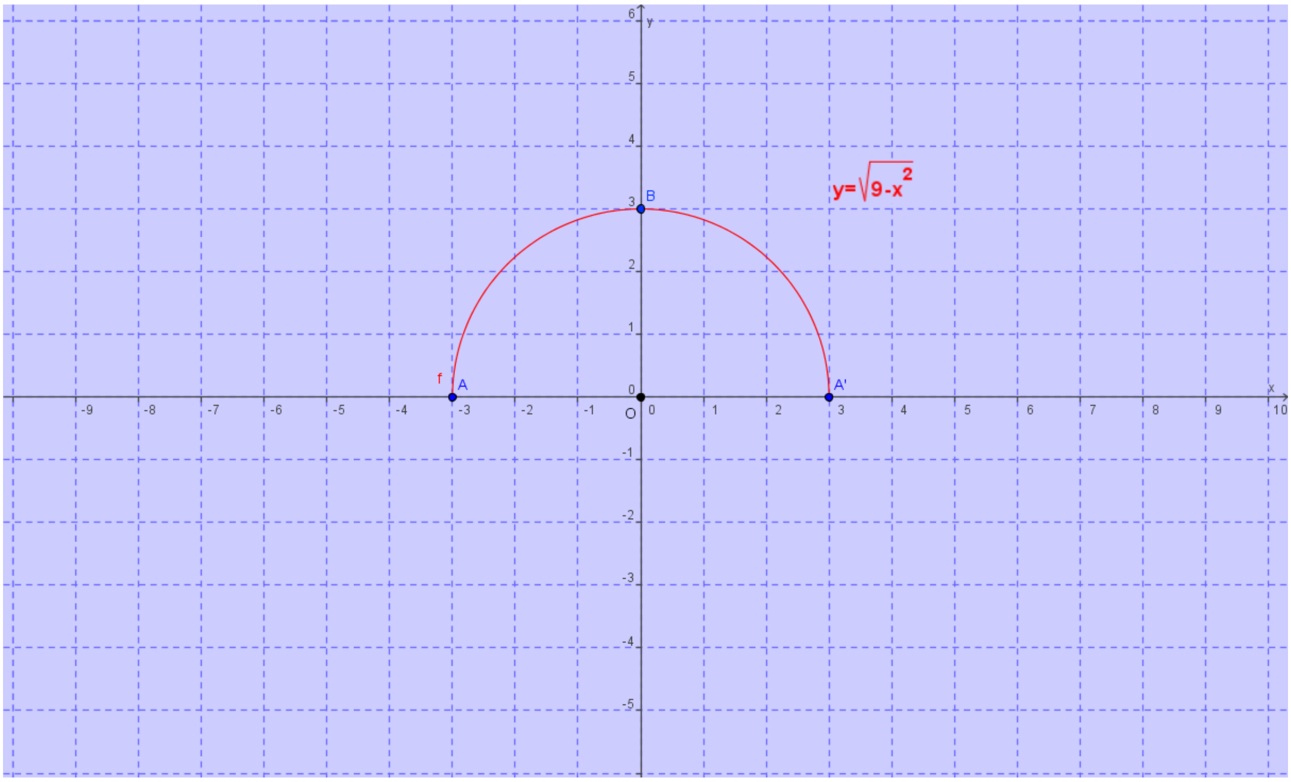
Calcolando la derivata seconda si ha:

$$y'' = \frac{-\sqrt{9-x^2} + \dfrac{-x^2}{\sqrt{9-x^2}}}{9-x^2}$$, cioè

$$y'' = \frac{-9}{(9-x^2)\sqrt{9-x^2}}.$$

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene che essa risulta negativa per $-3 < x < 3$, quindi la funzione data risulta concava verso il basso in $]-3;3[$. Inoltre, poiché la derivata seconda non si annulla non ci sono punti d'inflessione.

9) **Grafico** :



Torna su