STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA IRRAZIONALE INTERA

Esempio D:

$$\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$$

1) **Classificazione e Dominio**:

Funzione algebrica irrazionale intera (inversa della funzione parabola cubica di equazione $\boldsymbol{y = x^3}$, avente flesso orizzontale nell'origine degli assi cartesiani).

Poiché è sempre possibile estrarre nei reali la radice cubica di un numero la funzione è definita su tutto l'asse reale, quindi il campo di esistenza o dominio è $]-\infty\,;\,+\infty[$, ossia $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}$ **.**

2) **Simmetrie**:

La funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, pertanto, è dispari, ossia si verifica la relazione $f(x) = -f(-x)$. Ad esempio, $\boldsymbol{A(8;2)}$ $\boldsymbol{e}$ $\boldsymbol{A'(-8;-2)}$ sono una coppia di punti simmetrici del grafico.

3) **Studio del segno**:

Si pone: $\boldsymbol{\sqrt[3]{x} \geq 0}$ quindi $\boldsymbol{x \geq 0}$, cioè la funzione data è positiva in $]\boldsymbol{0}\,;\,+\infty[$, mentre è negativa in $]-\infty\,;\,\boldsymbol{0}[$ ed è nulla per $\boldsymbol{x = 0}$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani**:

La curva della funzione data passa per $\boldsymbol{O(0;0)}$.

5) **Andamento della funzione agli estremi dell'intervallo del dominio**:

Osservando che $\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{x} = \infty \begin{array}{l} \to \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x} = +\infty \\ \to \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x} = -\infty \end{array}$ la funzione data non ammette alcun tipo di asintoti.

6) **Crescenza e/o decrescenza**:

La funzione si può scrivere $\boldsymbol{y = x^{\frac{1}{3}}}$ e applicando la regola della derivata della potenza si ottiene

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{3} x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3} x^{-\frac{2}{3}}}$$

quindi la derivata prima è

$$\boldsymbol{y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}}$$

definita $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} - \{\boldsymbol{0}\}$ **(dominio della derivata prima).**

Studiando il segno della derivata prima se ne deduce che essa è sempre positiva nell'insieme dove è definita, ossia in $]-\infty\,;\ \boldsymbol{0}[\ \cup\ ]\boldsymbol{0}\,;+\infty[$ **,** quindi la funzione data è ivi crescente.

7) **Punti stazionari**:

Poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo relativo, di minimo relativo o di flesso a tangente orizzontale.

8) **Concavità e/o convessità:**

Calcolando la derivata seconda si ha

$$\boldsymbol{y'' = -\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}\, x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9} x^{-\frac{5}{3}}}$$

quindi la derivata seconda **è**

$$\boldsymbol{y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^5}}}$$

Cioè

$$\boldsymbol{y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}}}$$

definita $\forall \boldsymbol{x} \in \mathbb{R} - \{\boldsymbol{0}\}$ **.**

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene

$$-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x^2}} > 0 \rightarrow -x > 0 \rightarrow x < 0$$

cioè essa risulta positiva in $]-\infty\,;\,0[$, pertanto, in questo intervallo la funzione data è concava verso l'alto, mentre risulta negativa in $]0\,;+\infty[$ quindi la funzione data è ivi concava verso il basso.

9) **Punti non stazionari**:

Sapendo che una funzione f presenta in un punto di ascissa x_0 un flesso a tangente verticale quando non è derivabile nel suo punto di ascissa x_0 e ivi i due limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti e dello stesso segno, ossia $f'_+(x_0) = \lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty = \lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$,

si può dedurre che

la funzione $y = \sqrt[3]{x}$ nell'origine degli assi cartesiani non è derivabile, infatti la derivata prima $y' = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$ non è definita per $x = 0$,

inoltre per definizione si ha

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{0+h}-\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \frac{0}{0} \quad \textit{forma d'indecisione}$$

Applicando la regola di De L'Hospital ha senso scrivere

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} =^{H} \lim_{h\to 0^+} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{h^2}}}{1} = \lim_{h\to 0^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Analogamente si ottiene

$$f'_-(0) = \lim_{h\to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} =^{H} \lim_{h\to 0^-} \frac{\frac{1}{3\sqrt[3]{h^2}}}{1} = \lim_{h\to 0^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Pertanto, la funzione data presenta nell'origine degli assi cartesiani un flesso a tangente verticale ascendente, l'asse delle ordinate è tangente alla curva in $O(0;0)$.

N.B.

Per dimostrare (più rapidamente) che la funzione data presenta nell'origine degli assi cartesiani un flesso a tangente verticale, si possono calcolare i seguenti limiti:

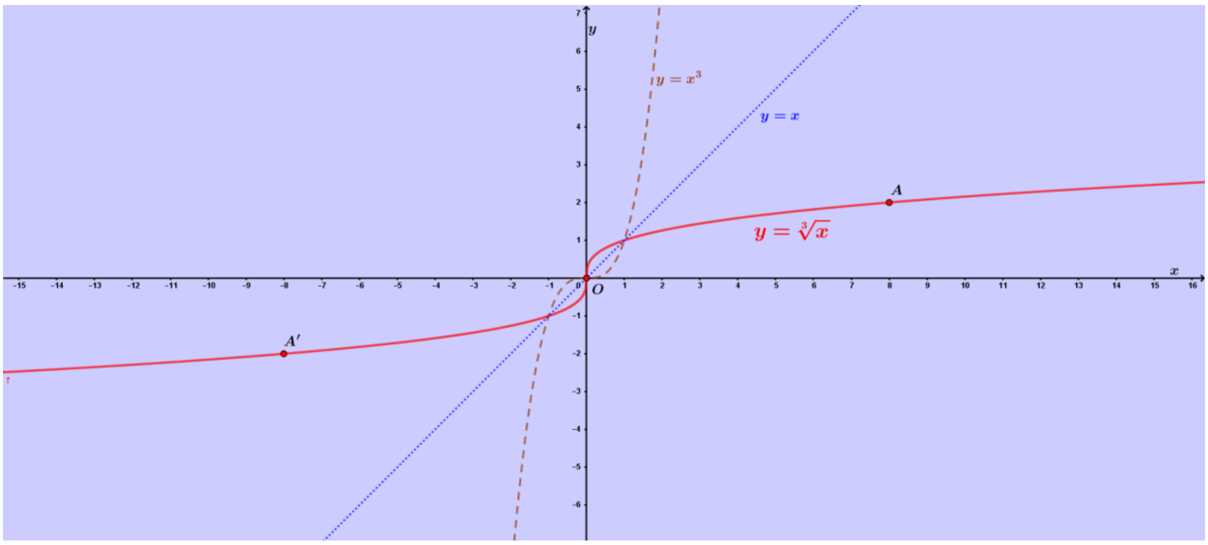
$$\boldsymbol{f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty}$$

e

$$\boldsymbol{f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty}$$

10) <u>Grafico:</u>

Il grafico della funzione $\boldsymbol{y = \sqrt[3]{x}}$ è simmetrico, rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante, al grafico della funzione inversa $\boldsymbol{y = x^3}$.



Torna su