STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA IRRAZIONALE INTERA

Esempio E:

$$y = \sqrt[3]{x^2}$$

1) Classificazione e Dominio:

Funzione algebrica irrazionale intera, parabola di William Neile.

Poiché è sempre possibile estrarre nei reali la radice cubica di un numero la funzione è definita su tutto l'asse reale, quindi il campo di esistenza o dominio della funzione è $]-\infty\,;\,+\infty[$, ossia $\forall x \in \mathbb{R}$.

2) Simmetrie:

La funzione è simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, pertanto, è pari, ossia si verifica la relazione $f(x) = f(-x)$. Ad esempio, $\boldsymbol{A(1;1)}$ ***e*** $\boldsymbol{A'(-1;1)}$ sono una coppia di punti simmetrici del grafico.

3) Studio del segno:

Si pone: $\sqrt[3]{x^2} \geq 0$ ed essendo sempre verificata la disequazione, la funzione data è positiva in $]-\infty\,;\,0[\,\cup\,]0\,;+\infty[$ ed è nulla per $x = 0$.

4) Intersezione con gli assi cartesiani:

La curva della funzione data passa per $\boldsymbol{O(0;0)}$.

5) **Andamento della funzione agli estremi dell'intervallo del dominio**:

Osservando che $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[3]{x^2} = \infty$ $\begin{array}{l} \to \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty \\ \to \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^2} = +\infty \end{array}$ la funzione data non ammette alcun tipo di asintoti.

6) **Crescenza e/o decrescenza**:

La funzione si può scrivere $y = x^{\frac{2}{3}}$ e applicando la regola della derivata della potenza si ottiene

$$y' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$$

quindi la derivata prima è

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ **(dominio della derivata prima).**

Studiando il segno della derivata prima della funzione si ottiene

$$\frac{2}{3\sqrt[3]{x}} > 0 \to x > 0$$

cioè essa risulta positiva in $]0\,;+\infty[$, pertanto, in questo intervallo la funzione data è crescente, mentre la derivata prima risulta negativa in $]-\infty\,;\,0[$ quindi la funzione data è ivi decrescente.

7) **Punti stazionari**:

Poiché la derivata prima non si annulla non esistono punti di massimo relativo, di minimo relativo o di flesso a tangente orizzontale.

8) **Concavità e/o convessità:**

Calcolando la derivata seconda si ha

$$y'' = -\frac{1}{3} \times \frac{2}{3}\,x^{-\frac{1}{3}-1} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{4}{3}}$$

quindi la derivata seconda **è**

$$y'' = -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}}$$

Cioè

$$y'' = -\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}}$$

definita $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ **.**

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene

$$-\frac{2}{9x\sqrt[3]{x}} > 0 \to -\frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} > 0 \ \to \textit{la disequazione non e'mai verificata}$$

$$\textit{essendo la quantità } \frac{2}{9\sqrt[3]{x^4}} \textit{ sempre positiva nel suo insieme di definizione.}$$

Pertanto, la derivata seconda è sempre negativa in $]-\infty\,;\ 0[\ \cup\ ]0\,;+\infty[$, quindi la funzione data è ivi concava verso il basso.

9) __Punti non stazionari__:

Sapendo che una funzione f presenta in un punto di ascissa x_0 una cuspide quando non è derivabile nel suo punto di ascissa x_0 e ivi i due limiti destro e sinistro del rapporto incrementale sono infiniti e di segno opposto, ossia $f'_+(x_0) = lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \pm\infty \neq \mp\infty = lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'_-(x_0)$ **,**

si può dedurre che

la funzione $y = \sqrt[3]{x^2}$ nell'origine degli assi cartesiani non è derivabile, infatti la derivata prima

$$y' = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

non è definita per $x = 0$,

inoltre per definizione si ha

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{f(0+h)-f(0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{0+h^2}-\sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} = \frac{0}{0} \quad \textit{forma d'indecisione}$$

Applicando la regola di De L'Hospital ha senso scrivere

$$f'_+(0) = \lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} =^H \lim_{h\to 0^+}\frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{h}}}{1} = \lim_{h\to 0^+}\frac{2}{3\sqrt[3]{h}} = +\infty$$

Analogamente si ottiene

$$f'_-(0) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h^2}}{h} =^H \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{2}{3\sqrt[3]{h}}}{1} = \lim_{h \to 0^-} \frac{2}{3\sqrt[3]{h}} = -\infty$$

Pertanto, la funzione data presenta nell'origine degli assi cartesiani una cuspide, inoltre in $O(0;0)$ la curva ha un punto di minimo assoluto.

N.B.

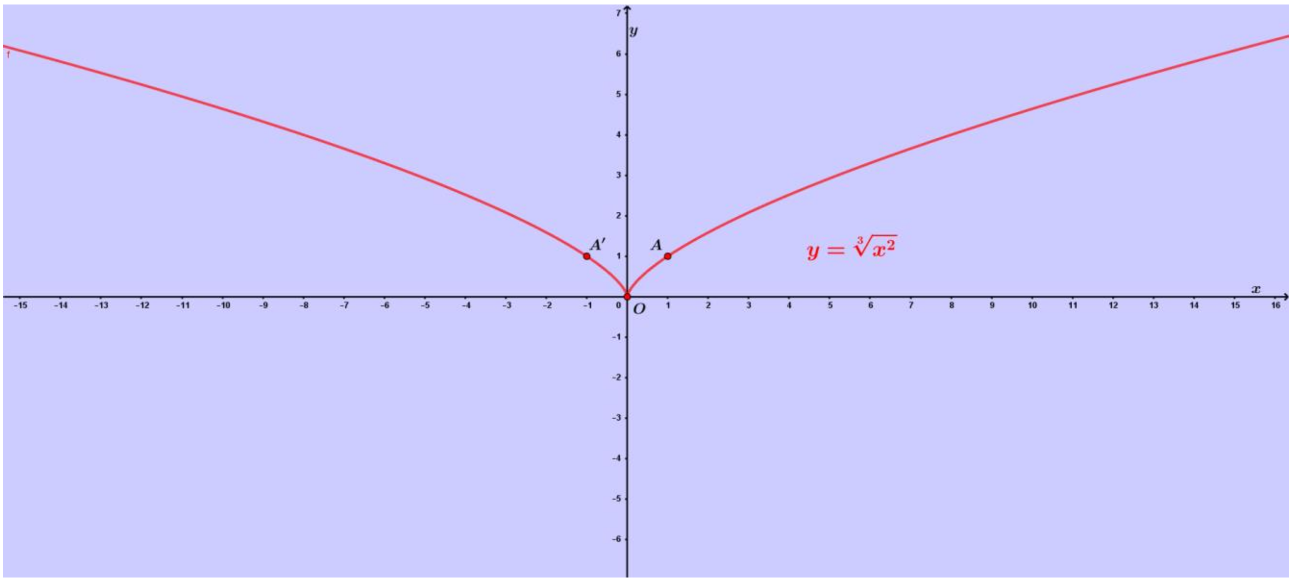
Per dimostrare (più rapidamente) che la funzione data presenta nell'origine degli assi cartesiani una cuspide, si possono calcolare i seguenti limiti:

$$f'_+(0) = \lim_{x \to 0^+} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = +\infty$$

e

$$f'_-(0) = \lim_{x \to 0^-} \frac{2}{3\sqrt[3]{x}} = -\infty$$

10) <u>**Grafico:**</u>



Torna su