Home page

Analisi

Classe quinta

STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE LOGARITMICA

Esempio A $y = \ln x$

1) Classificazione e Dominio

Funzione trascendente logaritmica.

La presenza del logaritmo impone che sia $x > 0$. Il campo di esistenza è $]0;+\infty[$.

2) Simmetrie

La funzione non è simmetrica.

3) Studio del segno

Si pone $\ln x \geq 0$, per definizione di logaritmo si può scrivere $\ln x \geq \ln 1$ cioè $x \geq 1$, quindi la funzione data è positiva in $]1;+\infty[$, mentre è negativa in $]0;1[$, infine è nulla per $x = 1$.

4) Intersezione con gli assi cartesiani

La funzione data interseca l'asse delle ascisse nel punto $A(1;0)$.

5) Asintoti

La funzione è asintotica all'asse delle ordinate, infatti:

$\lim_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, quindi $x = 0$ è l'equazione dell'asintoto verticale.

Inoltre, $\lim_{x\to +\infty} \ln x = +\infty$, quindi non esiste l'asintoto orizzontale.

Applicando il Teorema di De L'Hospital ha senso scrivere

$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$, quindi non esiste l'asintoto obliquo.

6) <u>Crescenza e/o decrescenza</u>

Calcolando la derivata prima si ha:

$$y' = \frac{1}{x}$$

Studiando il segno della derivata prima se ne deduce che essa risulta sempre positiva nel dominio della funzione $y = \ln x$, ossia per $x > 0$, quindi la funzione data è sempre crescente in $]0;+\infty[$

7) <u>Punti stazionari</u>

La funzione non presenta punti di massimo relativo o di minimo relativo e non presenta punti di flesso a tangente orizzontale poiché la derivata prima non si annulla.

8) <u>Concavità e/o convessità</u>

La derivata prima si può scrivere $y' = x^{-1}$ e applicando la regola della derivata della potenza si ottiene $y'' = -1\,x^{-2}$ cioè

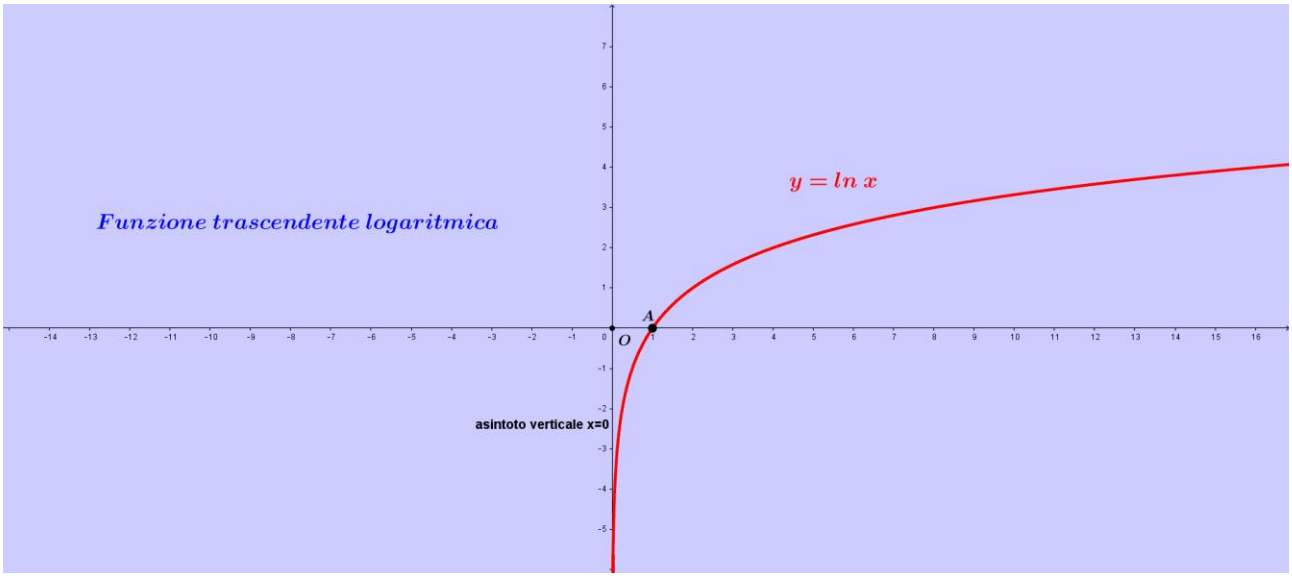
$$y'' = -\frac{1}{x^2}$$

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ottiene che essa risulta sempre negativa nel dominio della funzione data, quindi la funzione $y = \ln x$ è sempre concava verso il basso in $]0;+\infty[$.

9) <u>Punti non stazionari</u>

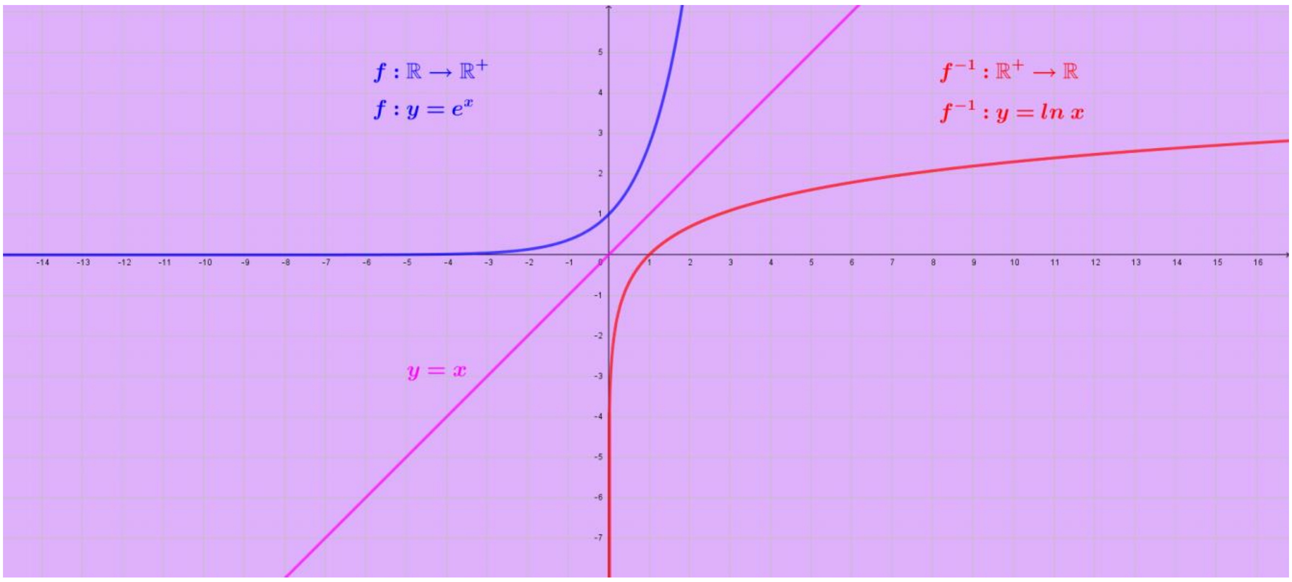
Poiché la derivata seconda non si annulla non ci sono ulteriori punti d'inflessione a tangente obliqua.

10) Grafico



Osservazione

La funzione $y = e^x$ non è biiettiva, ma se si "restringe" il codominio all'insieme immagine, cioè da $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ allora esiste la funzione inversa di equazione $y = ln\,x$, e i grafici delle due funzioni sono simmetrici rispetto alla bisettrice del primo e terzo quadrante.



Torna su