STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE LOGARITMICA

Esempio D: $y = x \ln x$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione trascendente logaritmica.

La presenza del logaritmo impone che sia $x > 0$. Il C.E. è $]0;+\infty[$.

2) **Simmetrie** :

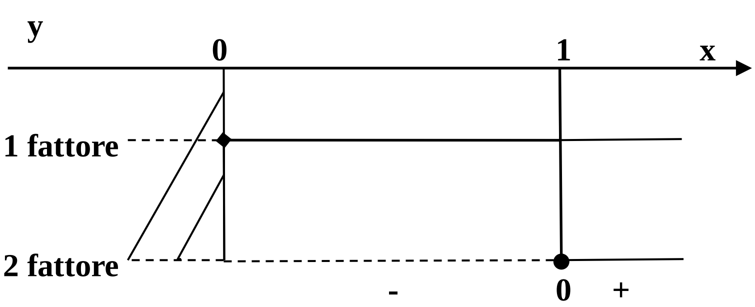
La funzione non è simmetrica.

3) **Studio del segno** :

Si pone: $x \ln x \geq 0$ ossia:

$$\mathbf{1\ fattore:}\ x \geq 0$$

$$\mathbf{2\ fattore:}\ \ln x \geq 0 \rightarrow x \geq 1$$



quindi la funzione data è positiva in $]1;+\infty[$, mentre è negativa in $]0;1[$, infine è nulla per $x = 1$. (Si ricorda che per $x = 0$ la funzione non è definita).

4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

La funzione data interseca l'asse delle ascisse nel punto $\mathbf{A(1;0)}$.

5) **Asintoti** :

La funzione non ha asintoti, infatti:

$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \overset{H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0^- \ ,$$

quindi non esiste l'asintoto verticale.

Inoltre, $\lim_{x \to +\infty} x \ln x = +\infty$, quindi non esiste l'asintoto orizzontale.

Infine, $\lim_{x \to +\infty} \frac{x \ln x}{x} = \lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$, quindi non esiste l'asintoto obliquo.

6) **Crescenza o decrescenza** :

Calcolando la derivata prima si ha:

$y' = \ln x + \frac{x}{x}$, ossia:

$y' = \ln x + 1.$

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$\ln x + 1 \geq 0 \rightarrow \ln x \geq -1 \rightarrow x \geq e^{-1}$.

Se ne deduce che la derivata prima è positiva per $x > e^{-1}$, quindi la funzione data è crescente in $]e^{-1};+\infty[$, mentre è negativa per $0 < x < e^{-1}$, quindi la funzione è negativa in $]0;e^{-1}[$.

Inoltre, la derivata prima è nulla per $x = e^{-1}$.

7) **Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale** :

La funzione data ha un minimante nel punto di ascissa $\mathbf{x = \frac{1}{e}}$, quindi, essendo $\mathbf{f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e}}$, la funzione presenta un minimo relativo (anche assoluto) nel punto $\mathbf{B\left(\frac{1}{e}; -\frac{1}{e}\right)}$.

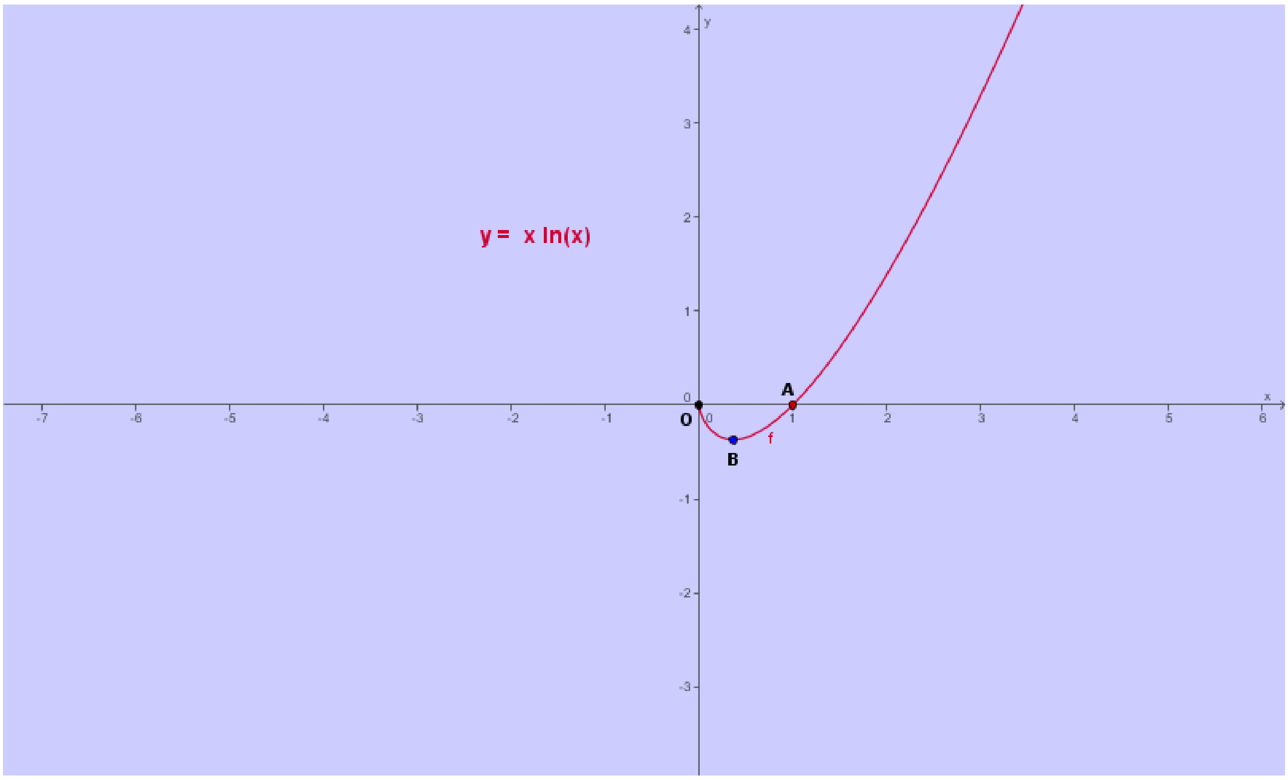
8) **Concavità e convessità** :

Calcolando la derivata seconda si ha:

$$\mathbf{y'' = \frac{1}{x}}.$$

Studiando il segno della derivata seconda ed essendo la funzione $\mathbf{y = x \ln x}$ definita nel semiasse delle ascisse positive, si ha, necessariamente, che la derivata seconda è sempre positiva in $\mathbf{]0;+\infty[}$, quindi la funzione data volge la concavità verso l'alto in tutto il suo campo di esistenza. Inoltre, poiché la derivata seconda non si annulla non ci sono punti d'inflessione.

9) **Grafico** :



Torna su