STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE TRIGONOMETRICA

Esempio F: $y = \arcsin(x-1)$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione trascendente trigonometrica.

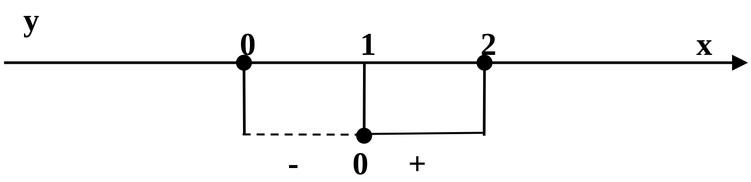
La presenza dell'arcoseno impone che sia $-1 \le x-1 \le 1 \rightarrow 0 \le x \le 2$.Ossia, il C.E. è $[0,2]$.

2) **Simmetrie** :

La funzione non è simmetrica.

3) **Studio del segno** :

Sapendo che la funzione arcoseno è positiva per $0 < x \le 1$, mentre è negativa per $-1 \le x < 0$, infine è nulla per $x = 0$, se ne deduce che la funzione $y = \arcsin(x-1)$ è positiva per $0 < x-1 \le 1 \rightarrow 1 < x \le 2$, mentre è negativa per $-1 \le x-1 < 0 \rightarrow 0 \le x < 1$, infine è nulla per $x - 1 = 0 \rightarrow x = 1$. Ossia:



4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

$$\cap_y \begin{cases} y = \arcsin(x-1) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \arcsin(-1) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = -\dfrac{\pi}{2} \\ x = 0 \end{cases}$$

ossia interseca l'asse delle ordinate nel punto $A\left(0;-\dfrac{\pi}{2}\right)$.

$$\cap_x \begin{cases} y = \text{arcsen}(x-1) \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \text{arcsen}(x-1) = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

ossia interseca l'asse delle ascisse nel punto $\mathbf{B(1;0)}$.

5) **Asintoti** :

La funzione non ha asintoti, si osserva che:

$$\mathbf{f(0) = -\frac{\pi}{2}} \text{ e } \mathbf{f(2) = \frac{\pi}{2}}.$$

6) **Crescenza o decrescenza** :

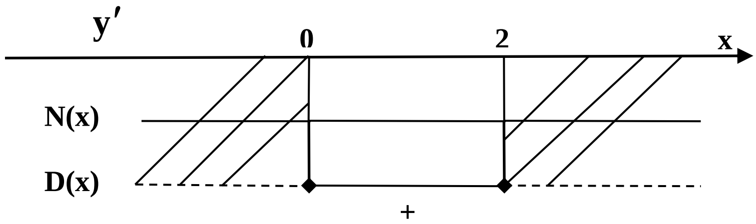
Calcolando la derivata prima si ha:

$$\mathbf{y' = \frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}} \text{, ossia } \mathbf{y' = \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}}.$$

Studiando il segno della derivata prima si ottiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}} > 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): 1 > 0 \rightarrow \forall x \\ D(x): \sqrt{2x-x^2} > 0 \rightarrow 2x - x^2 > 0 \rightarrow x^2 - 2x < 0 \rightarrow 0 < x < 2 \end{array} \right.$$

Ossia:



Essendo la derivata prima sempre maggiore di zero in $\mathbf{]0,2[}$, se ne deduce che la funzione data è sempre crescente in $\mathbf{]0,2[}$. La funzione non presenta estremanti, ma assume il suo massimo valore in $\mathbf{C\left(2;\frac{\pi}{2}\right)}$, e il suo minimo valore in $\mathbf{A\left(0;-\frac{\pi}{2}\right)}$.

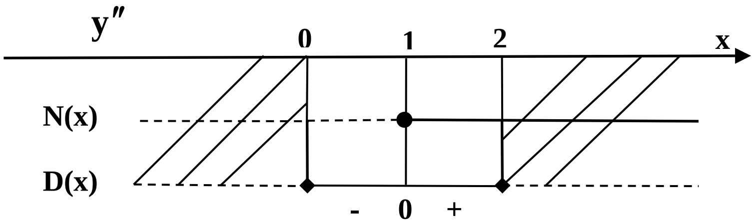
7) **Concavità e convessità** :

Calcolando la derivata seconda si ha:

$$\mathbf{y'' = \frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}}}.$$

Studiando il segno della derivata seconda si ottiene:

$$\frac{x-1}{\sqrt{(2x-x^2)^3}} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} N(x): x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \\ D(x): \sqrt{(2x-x^2)^3} > 0 \rightarrow 2x - x^2 > 0 \rightarrow x^2 - 2x < 0 \rightarrow 0 < x < 2 \end{cases}$$

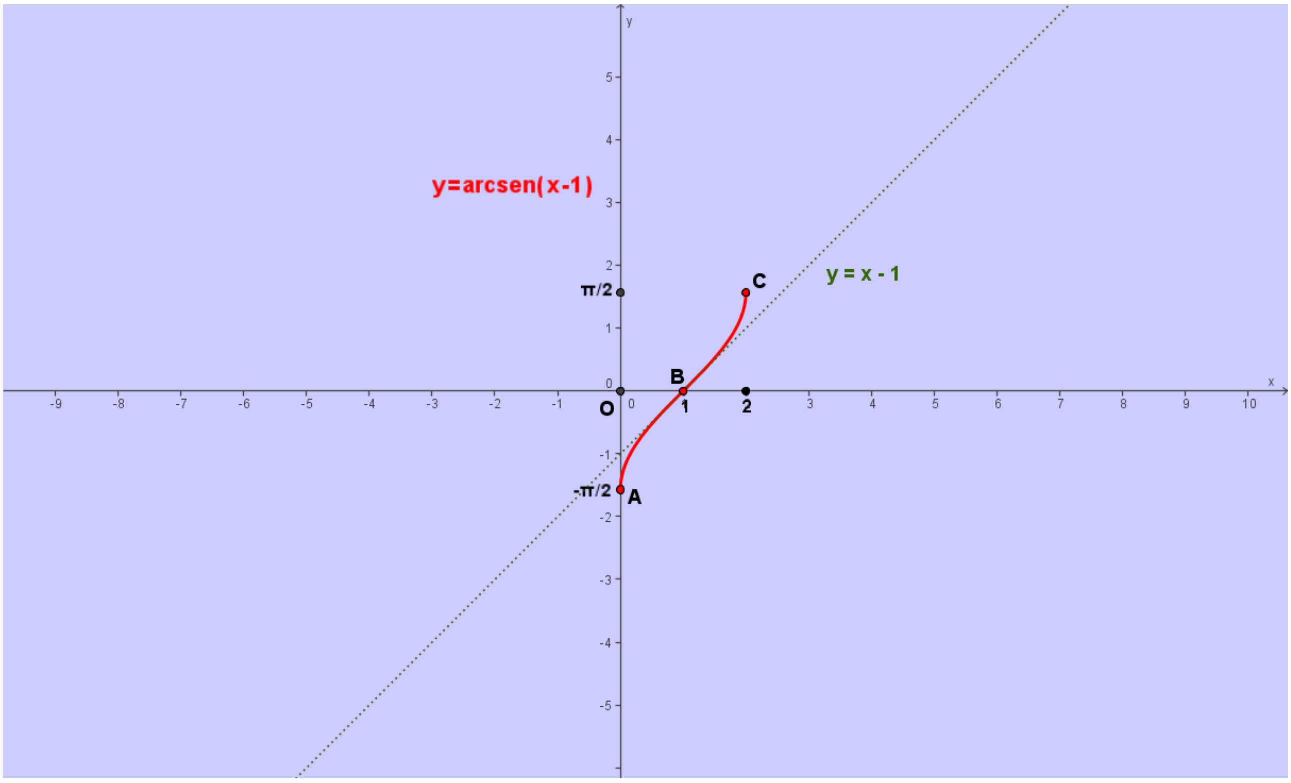


La derivata seconda è positiva per $1 < x < 2$ quindi la funzione data è concava verso l'alto in $]1;2[$, mentre per $0 < x < 1$ la derivata seconda è negativa quindi la funzione data volge la concavità verso il basso in $]0;1[$, infine per $x = 1$ la derivata seconda è nulla.

8) **Flessi a tangente obliqua** :

La funzione data presenta in $B(1;0)$ un punto di flesso a tangente obliqua. Essendo $f'(1) = 1 > 0$, il flesso è ascendente e la sua tangente ha equazione $y = x - 1$.

9) **Grafico** :



Torna su