STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE TRIGONOMETRICA

Esempio G: $$y = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione trascendente trigonometrica.

Il C.E. è $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

2) **Simmetrie** :

La funzione non è simmetrica.

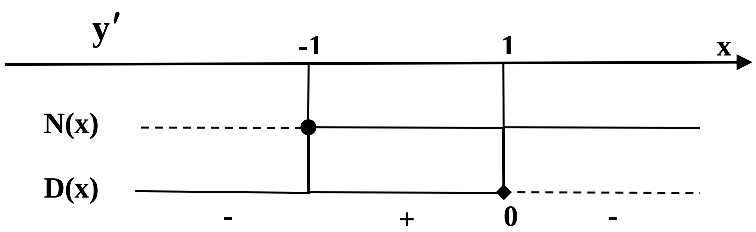
3) **Studio del segno** :

Si osserva che $\operatorname{arctg} f(x)\left\langle \begin{array}{l} >0 \\ =0 \\ <0 \end{array}\right.$ quando $f(x)\left\langle \begin{array}{l} >0 \\ =0 \\ <0 \end{array}\right.$.

pertanto, ponendo $\operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x} \geq 0$ si ha: $\frac{1+x}{1-x} \geq 0$,

quindi si ottiene:

$$\frac{1+x}{1-x} \geq 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1 \\ D(x): 1-x > 0 \rightarrow x < 1 \end{array}\right.$$



La funzione è positiva per $-1 < x < 0$, è negativa per $x < -1$ e per $x > 1$ ed è nulla per $x = 0$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

$$\cap_x \begin{cases} y = \text{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{1+x}{1-x} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x+1=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$$

ossia interseca l'asse delle ascisse nel punto $\mathbf{A(-1;0)}$.

$$\cap_y \begin{cases} y = \text{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \text{arctg}(1) \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{\pi}{4} \\ x = 0 \end{cases}$$

ossia interseca l'asse delle ordinate nel punto $\mathbf{B\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)}$.

5) **Asintoti** :

La funzione ha un asintoto orizzontale di equazione $y = -\dfrac{\pi}{4}$, infatti:

$\lim_{x\to\pm\infty} \text{arctg}\dfrac{1+x}{1-x} = -\dfrac{\pi}{4}$. Inoltre, si osserva che:

$$\lim_{x\to1^-} \text{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \text{arctg}(+\infty) = \frac{\pi}{2} \ ,$$

$$\lim_{x\to1^+} \text{arctg}\frac{1+x}{1-x} = \text{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2} \ ,$$

quindi per $x=1$ la funzione presenta un punto di discontinuità di prima specie (di salto π).

6) **Crescenza o decrescenza** :

Calcolando la derivata prima si ha:

$$y' = \frac{1}{x^2+1} .$$

Essendo la derivata prima sempre maggiore di zero, se ne deduce che la funzione data è sempre crescente in $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$. La funzione non presenta estremanti.

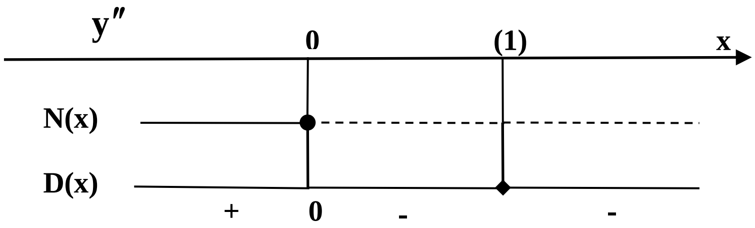
7) **Concavità e convessità** :

Calcolando la derivata seconda si ha:

$$y'' = \frac{-2x}{(x^2+1)^2} .$$

Studiando il segno della derivata seconda si ottiene:

$$\frac{-2x}{(x^2+1)^2} \geq 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): -2x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \\ D(x): (x^2+1)^2 > 0 \rightarrow \forall x \end{array} \right.$$

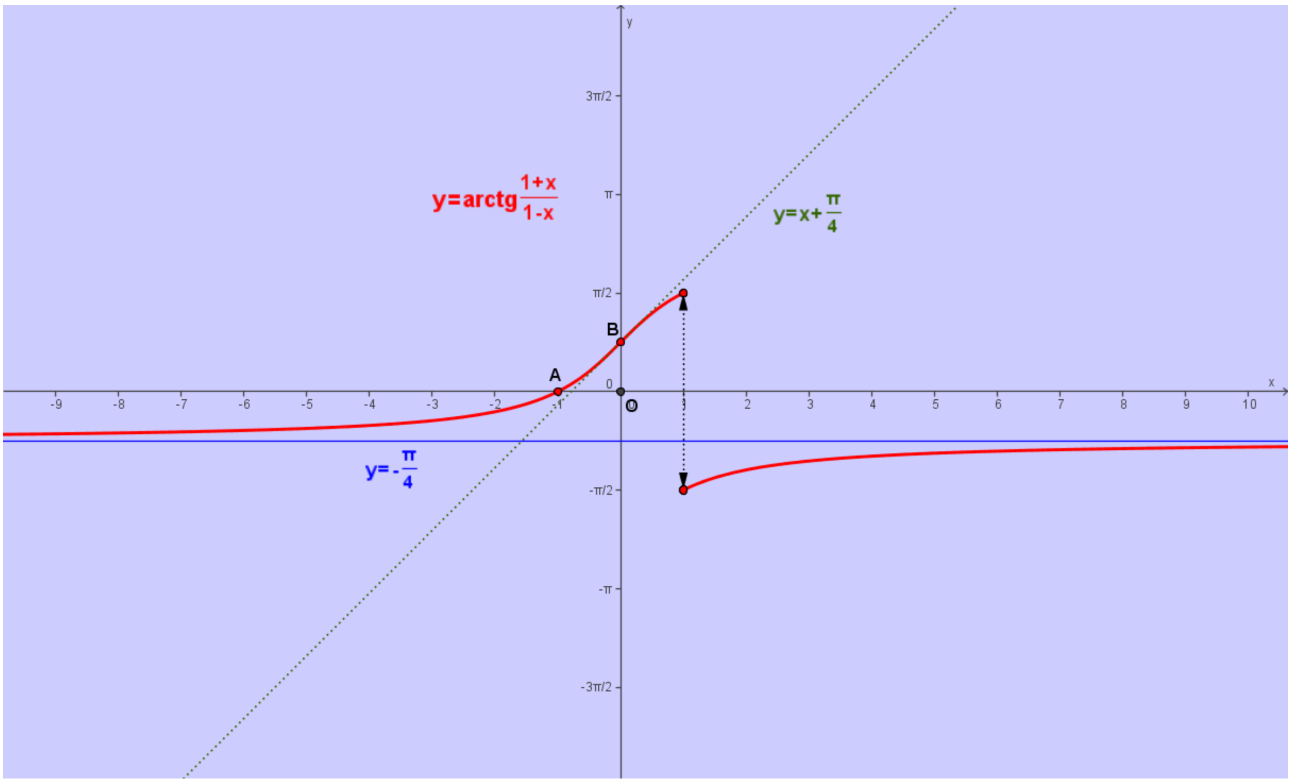


Per $x < 0$ la derivata seconda è positiva quindi la funzione data è concava verso l'alto, mentre per $0 < x < 1$ e per $x > 1$ la derivata seconda è negativa quindi la funzione data è concava verso il basso, infine per $x = 0$ la derivata seconda è nulla.

8) **<u>Flessi a tangente obliqua</u>** :

La funzione data presenta in B un punto di flesso a tangente obliqua. Essendo $y'(0) = 1 > 0$, il flesso è ascendente e la sua tangente ha equazione $y = x + \frac{\pi}{4}$.

9) **<u>Grafico</u>** :



Torna su