STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE TRIGONOMETRICA

Esempio H: $$y = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione trascendente trigonometrica.

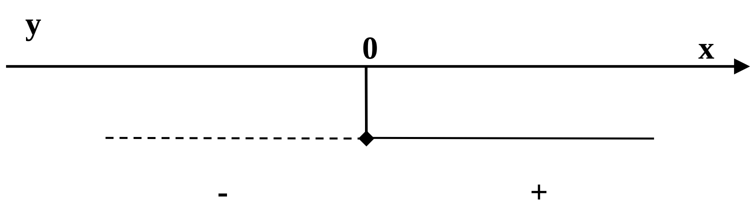
Il C.E. è $\left]-\infty;0\right[\cup \left]0;+\infty\right[$.

2) **Simmetrie** :

La funzione è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, infatti, ponendo $f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1}{x}$ si ha che $f(-x) = \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{x}\right) = -\operatorname{arctg}\frac{1}{x}$, pertanto, si è verificata la condizione che $f(x) = -f(-x)$, ossia la funzione è dispari.

3) **Studio del segno** :

Si osserva che $\operatorname{arctg}\frac{1}{x} > 0$ quando $\frac{1}{x} > 0$ ossia quando $x > 0$, quindi si ha:



La funzione è positiva per $x > 0$ mentre è negativa per $x < 0$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

La funzione non interseca gli assi cartesiani.

5) **Asintoti** :

La funzione è asintotica all'asse delle ascisse, infatti:

$$\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0^- \text{ e } \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = 0^+ .$$

Inoltre, si osserva che:

$$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \text{ e } \lim_{x \to 0^+} \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2},$$

quindi la funzione ha per $x = 0$ un punto di discontinuità di prima specie (di salto π).

6) **Crescenza o decrescenza** :

Calcolando la derivata prima si ha:

$$y' = -\frac{1}{x^2 + 1}.$$

Essendo la derivata prima sempre minore di zero, se ne deduce che la funzione data è sempre crescente in $]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$. La funzione non presenta estremanti.

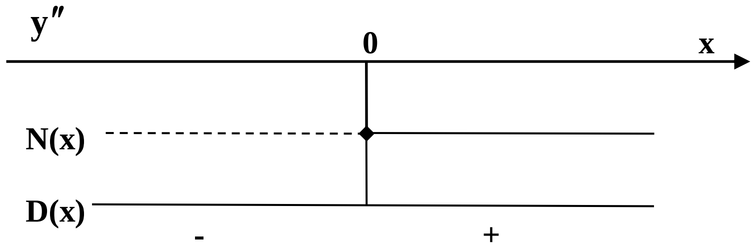
7) **Concavità e convessità** :

Calcolando la derivata seconda si ha:

$$y'' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}.$$

Studiando il segno della derivata seconda si ottiene:

$$\frac{2x}{(x^2+1)^2} > 0 \to \left\langle \begin{array}{l} N(x): 2x > 0 \to x > 0 \\ D(x): (x^2+1)^2 > 0 \to \forall x \end{array} \right.$$

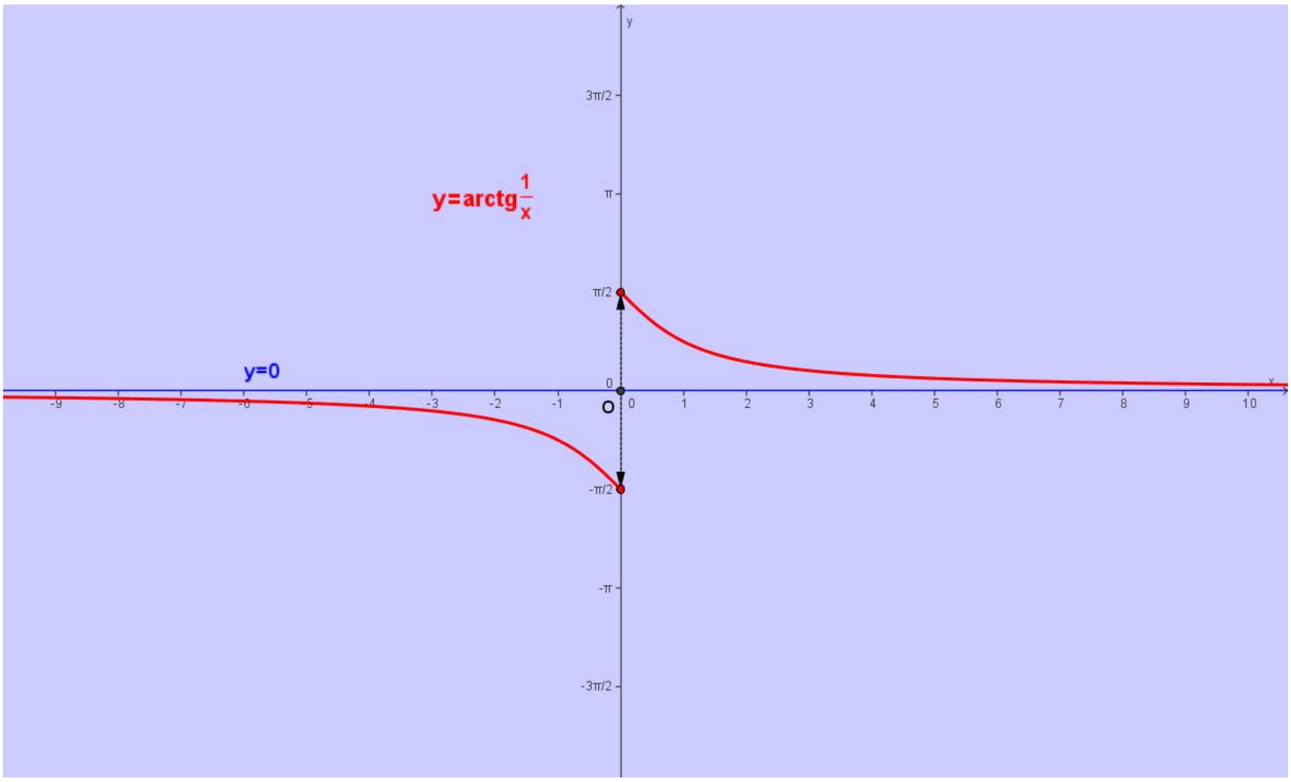


Per $\mathbf{x>0}$ la derivata seconda è positiva quindi la funzione data è concava verso l'alto, mentre per $\mathbf{x<0}$ la derivata seconda è negativa quindi la funzione data è concava verso il basso.

8) **<u>Flessi a tangente obliqua</u>** :

La funzione non presenta punti di flesso.

9) **<u>Grafico</u>** :



[Torna su]