STUDIO COMPLETO

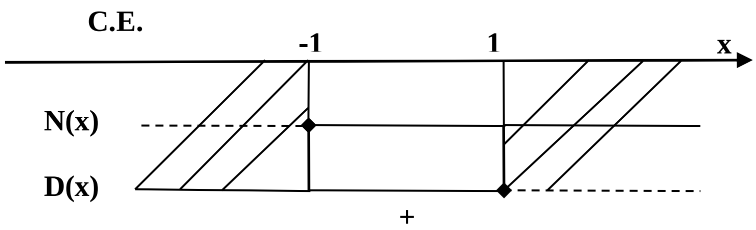
DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE LOGARITMICA

Esempio I: $$y = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

1) Classificazione e C.E.:

Funzione trascendente logaritmica. La presenza del logaritmo impone che $\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > 0$, ossia:

$$\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} > 0 \rightarrow \frac{1+x}{1-x} > 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): 1+x > 0 \rightarrow x > -1 \\ D(x): 1-x > 0 \rightarrow x < 1 \end{array} \right.$$



la funzione data è definita in $]-1;1[$.

2) Simmetrie :

La funzione è dispari, ossia è simmetrica rispetto all'origine degli assi cartesiani, infatti:

osservando che $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}$ si ha:

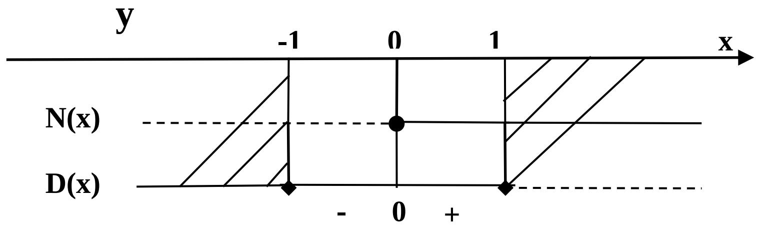
$$f(-x) = \ln\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = -f(x),$$

(Si potrebbe studiare la funzione in $[0;1[$ e alla fine costruire il grafico per simmetria.)

3) Studio del segno

Studiando il segno della funzione si ha:

$$\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \geq 0 \rightarrow \frac{1+x}{1-x} \geq 1 \rightarrow \frac{2x}{1-x} \geq 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): 2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ D(x): 1-x > 0 \rightarrow x < 1 \end{array} \right.$$ quindi si ottiene:



Pertanto, la funzione è positiva in $]0;1[$, mentre è negativa in $]-1;0[$, infine è nulla per $x = 0$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani**:

La funzione passa per l'origine degli assi cartesiani.

5) **Asintoti**:

La funzione presenta due asintoti verticali, infatti:

$$\lim_{x \to 1^-} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = +\infty \text{ e } \lim_{x \to -1^+} \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} = -\infty$$

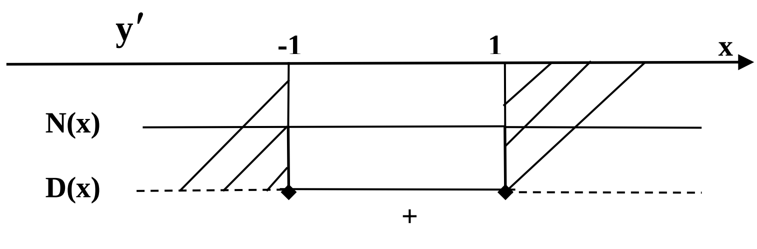
quindi $x = 1$ e $x = -1$ sono le equazioni degli asintoti.

6) **Crescenza o decrescenza**:

Calcolando la derivata prima della funzione si ha: $y' = \dfrac{1}{1-x^2}$.

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$$\frac{1}{1-x^2} > 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): 1 > 0 \rightarrow \forall x \\ D(x): 1-x^2 > 0 \rightarrow -1 < x < 1 \end{array} \right.$$ ossia:



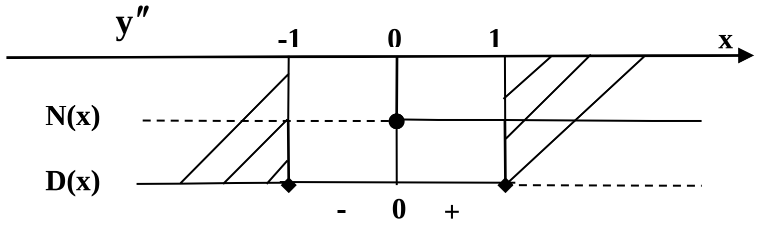
se ne deduce che $y' > 0$ in $]-1;1[$, quindi la funzione è crescente dove è definita.

7) **Concavità e convessità**:

Calcolando la derivata seconda della funzione si ha: $y'' = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$.

Studiando il segno della derivata seconda si ha:

$$\frac{2x}{(1-x^2)^2} \geq 0 \rightarrow \begin{cases} N(x): 2x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ D(x): (1-x^2)^2 > 0 \rightarrow \forall x - \{\pm 1\} \end{cases}$$ ossia:

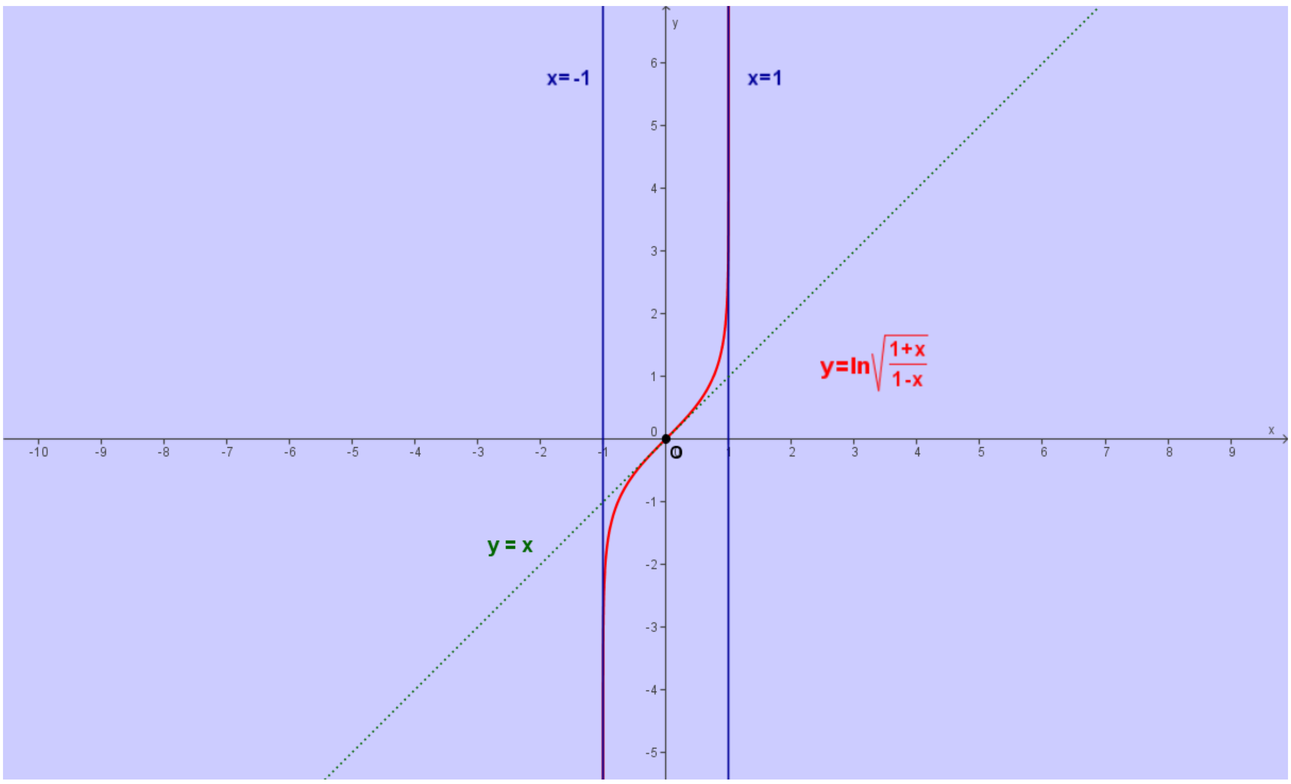


se ne deduce che $\mathbf{y'' > 0}$ in $\mathbf{]0;1[}$, quindi la funzione è concava verso l'alto in $\mathbf{]0;1[}$, mentre $\mathbf{y'' < 0}$ in $\mathbf{]-1;0[}$, quindi la funzione è concava verso il basso $\mathbf{]-1;0[}$, infine la derivata seconda è nulla per $\mathbf{x = 0}$.

8) **<u>Flessi a tangente obliqua</u>** :

La funzione presenta in $\mathbf{O(0;0)}$ un punto di flesso a tangente obliqua. Essendo $\mathbf{y'(0) = 1 > 0}$, il flesso è ascendente e la sua tangente è la bisettrice del primo e terzo quadrante, ossia $\mathbf{y = x}$.

9) **<u>Grafico</u>** :



Torna su