STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE ESPONENZIALE

Esempio L: $y = (x-2)e^x$

1) Classificazione e C.E.:

Funzione trascendente esponenziale.

Il C.E. è $]-\infty;+\infty[$.

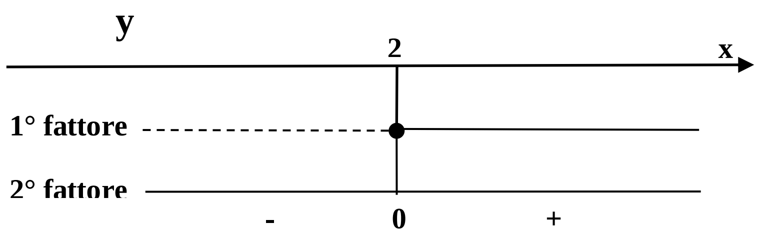
2) Simmetrie :

La funzione non è simmetrica.

3) Studio del segno :

Studiando il segno della funzione si ha:

$$(x-2)e^x \geq 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 1° \text{ fattore}: x-2 \geq 0 \rightarrow x \geq 2 \\ 2° \text{ fattore}: e^x > 0 \rightarrow \forall x \end{array} \right.$$ quindi si ottiene:



Pertanto, la $f(x)$ è positiva in $]2;+\infty[$, mentre è negativa in $]-\infty;2[$, infine è nulla per $x = 2$.

4) Intersezione con gli assi cartesiani :

$$\cap_x \begin{cases} y = (x-2)e^x \\ y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x-2=0 \\ y=0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=0 \end{cases}$$

ossia interseca l'asse delle ascisse nel punto $A(2;0)$.

$$\cap_y \begin{cases} y = (x-2)e^x \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y=-2 \\ x=0 \end{cases}$$ ossia interseca l'asse delle ordinate nel punto $B(0;-2)$.

5) <u>Asintoti</u> :

La funzione è asintotica all'asse delle ascisse, infatti:

$$\lim_{x\to-\infty}(x-2)e^x = \lim_{x\to-\infty}\frac{x-2}{\frac{1}{e^x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{-\frac{1}{e^x}} = -\lim_{x\to-\infty} e^x = 0^-$$, quindi $y=0$ è

l'equazione dell'asintoto orizzontale (sinistro). Inoltre, $\lim_{x\to+\infty}(x-2)e^x = +\infty$, ma essendo

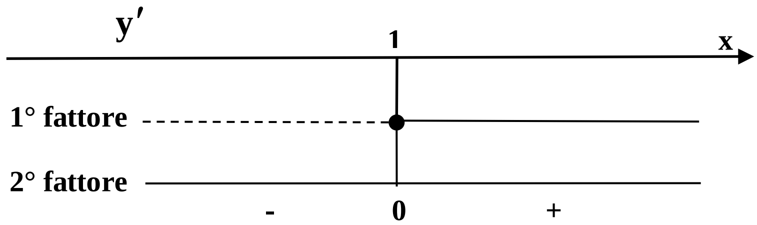
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-2)e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)\cdot\lim_{x\to+\infty} e^x = 1(+\infty) = +\infty$$ non esiste l'obliquo.

6) <u>Crescenza o decrescenza</u> :

Calcolando la derivata prima si ha: $y' = (x-1)e^x$.

Studiando il segno della derivata prima della funzione si ha:

$$(x-1)e^x \geq 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} 1°\ \ \text{fattore}: x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \\ 2°\ \ \text{fattore}: e^x > 0 \rightarrow \forall x \end{array} \right.$$ quindi si ottiene:



Pertanto, la derivata prima è positiva per $x>1$, quindi la funzione data è crescente in $]1;+\infty[$, mentre la derivata prima è negativa per $x<1$, quindi la funzione data è decrescente in $]-\infty;1[$, infine è nulla per $x=1$.

7) <u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u> :

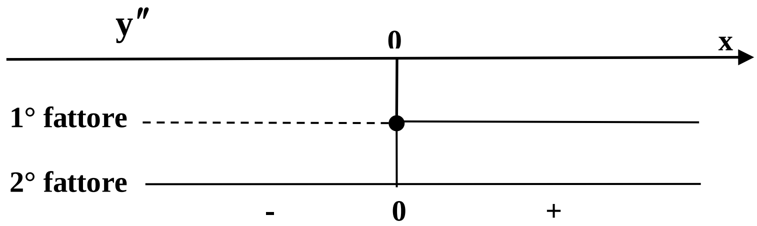
La funzione data ha un minimante nel punto di ascissa $x=1$, quindi, essendo $f(1)=-e$, la funzione presenta un minimo relativo (anche assoluto) nel punto $C(1;-e)$.

8) <u>Concavità e convessità</u> :

Calcolando la derivata seconda si ha: $y'' = xe^x$.

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ha:

$$xe^x \geq 0 \rightarrow \begin{cases} 1° \text{ fattore}: x \geq 0 \\ 2° \text{ fattore}: e^x > 0 \rightarrow \forall x \end{cases}$$ quindi si ottiene:

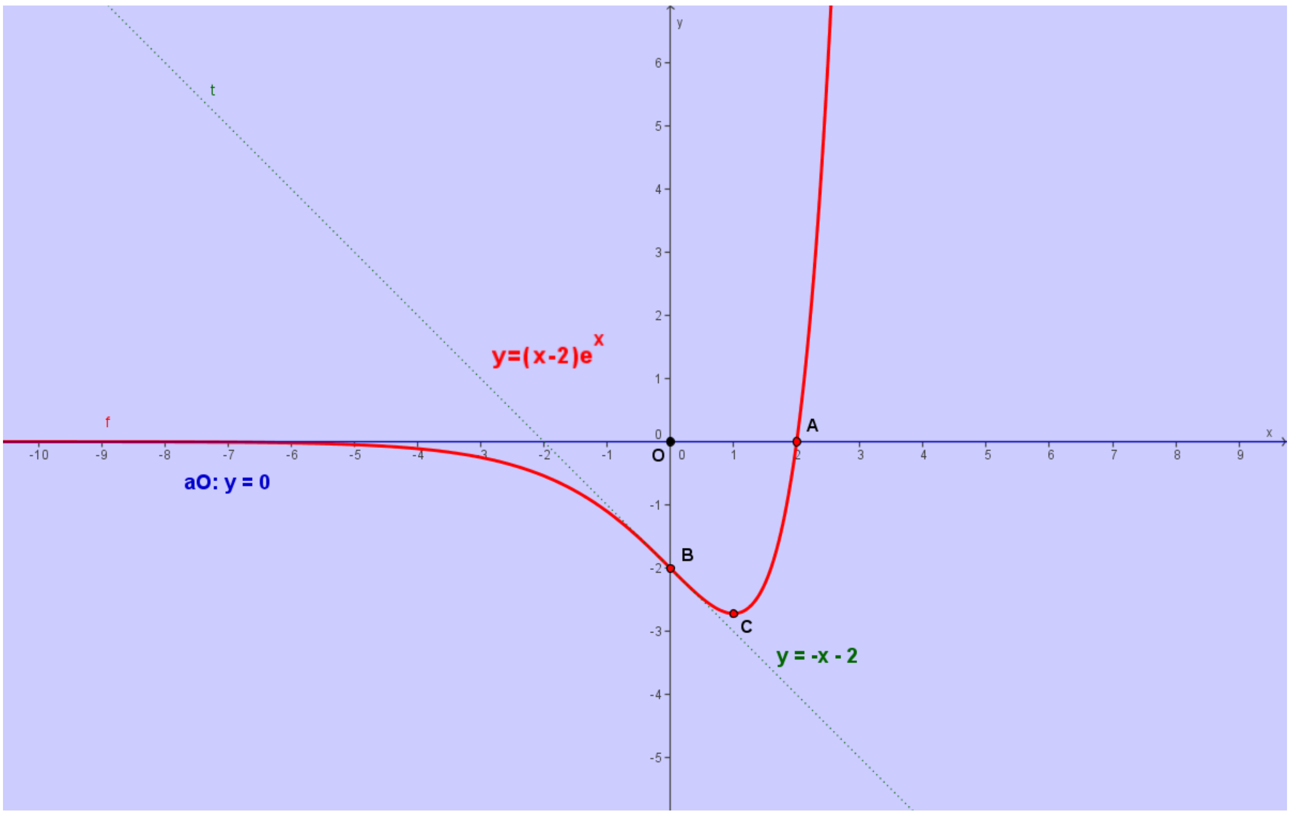


Pertanto, la derivata seconda è positiva per $\mathbf{x > 0}$, quindi la funzione data è concava verso l'alto in $\mathbf{]0;+\infty[}$, mentre la derivata seconda è negativa per $\mathbf{x < 0}$, quindi la funzione data è concava verso il basso in $\mathbf{]-\infty;0[}$, infine è nulla per $\mathbf{x = 0}$.

9) **<u>Flessi a tangente obliqua</u>** :

La funzione data presenta in $\mathbf{B}$ un punto di flesso a tangente obliqua. Essendo $\mathbf{y'(0) = -1 < 0}$, il flesso è discendente e la sua tangente ha equazione $\mathbf{t: y = -x - 2}$.

10) **<u>Grafico</u>** :



Torna su