STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE ESPONENZIALE

Esempio M: $$y = e^{\frac{1+x}{1-x}}$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione trascendente esponenziale.

Il C.E. è $]-\infty;1[\cup]1;+\infty[$.

2) **Simmetrie** :

La funzione non è simmetrica.

3) **Studio del segno** :

La funzione data è sempre positiva nel campo di esistenza.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani** :

$\cap_y \begin{cases} y = e^{\frac{1+x}{1-x}} \\ x = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} y = e \\ x = 0 \end{cases}$ ossia interseca l'asse delle ordinate nel punto $A(0;e)$.

5) **Asintoti** :

La funzione presenta un asintoto verticale di equazione $x = 1$ quando $x \to 1^-$, infatti:

$$\lim_{x\to 1^-} e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{+\infty} = +\infty \quad \text{(si osserva che } \lim_{x\to 1^-} \frac{1+x}{1-x} = +\infty\text{).}$$

Inoltre, $\lim_{x\to 1^+} e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{-\infty} = \frac{1}{e^{+\infty}} = 0^+$ (si osserva che $\lim_{x\to 1^+} \frac{1+x}{1-x} = -\infty$).

La funzione presenta un asintoto orizzontale di equazione $y = e^{-1}$ quando $x \to \pm\infty$, infatti

$$\lim_{x\to \pm\infty} e^{\frac{1+x}{1-x}} = e^{-1} = \frac{1}{e} \quad \text{(si osserva che } \lim_{x\to \pm\infty} \frac{1+x}{1-x} = -1\text{).}$$

6) **<u>Crescenza o decrescenza</u>** :

Calcolando la derivata prima si ha: $\mathbf{y' = \frac{2}{(1-x)^2}e^{\frac{1+x}{1-x}}}$.

La derivata prima è positiva in $\mathbf{]-\infty;1[\cup]1;+\infty[}$, quindi la funzione data è sempre crescente nel suo campo di esistenza.

7) **<u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u>** :

La funzione non ha estremanti.

8) **<u>Concavità e convessità</u>** :

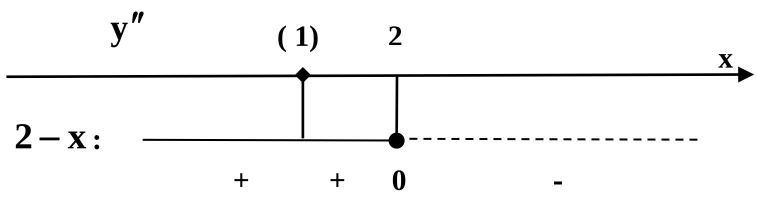
Calcolando la derivata seconda si ha: $\mathbf{y'' = \frac{4(2-x)e^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^4}}$.

Studiando il segno della derivata seconda della funzione si ha:

$$\mathbf{\frac{4(2-x)e^{\frac{1+x}{1-x}}}{(1-x)^4} \geq 0 \rightarrow 2-x \geq 0 \rightarrow x \leq 2},$$

(si osserva che i rimanenti fattori sono positivi nel campo di esistenza della funzione)

quindi si ottiene:

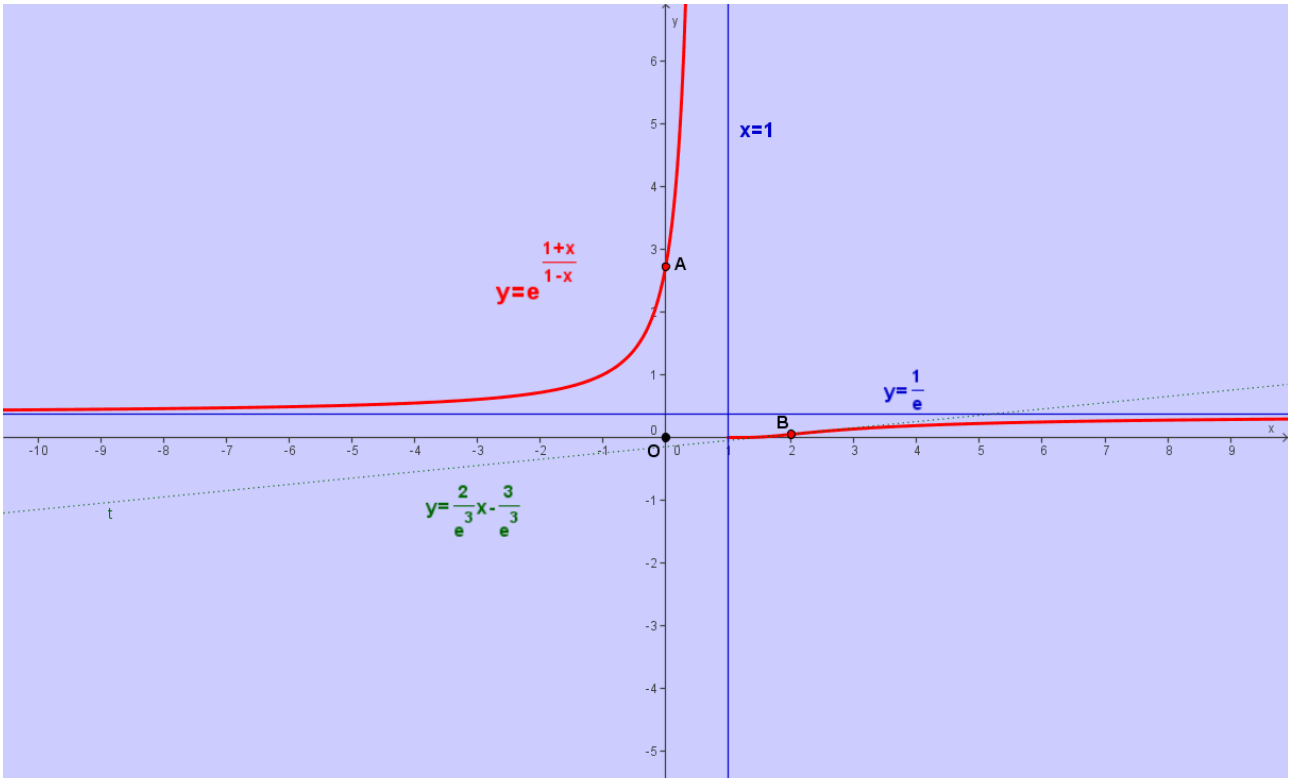


Pertanto, la derivata seconda è positiva in $\mathbf{]-\infty;1[\cup]1;2[}$, quindi la funzione data è concava verso l'alto in $\mathbf{]-\infty;1[\cup]1;2[}$, mentre la derivata seconda è negativa per $\mathbf{]2;+\infty[}$, quindi la funzione data è concava verso il basso in $\mathbf{]2;+\infty[}$, infine è nulla per $\mathbf{x = 2}$.

9) **<u>Flessi a tangente obliqua</u>** :

La funzione data presenta in $\mathbf{B\left(2;e^{-3}\right)}$ un punto di flesso a tangente obliqua. Essendo $\mathbf{y'(2) = 2e^{-3} > 0}$, il flesso è ascendente e la sua tangente ha equazione $\mathbf{t : y = \frac{2}{e^3}x - \frac{3}{e^3}}$.

10) Grafico :



Torna su