STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE INTERA IN VALORE ASSOLUTO

Esempio A: $\mathbf{y = |x^3 - 1|}$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione algebrica razionale intera di terzo grado, in valore assoluto. C.E.: $\forall \mathbf{x} \in \mathfrak{R}$.

2) **Simmetrie** :

La funzione non è simmetrica.

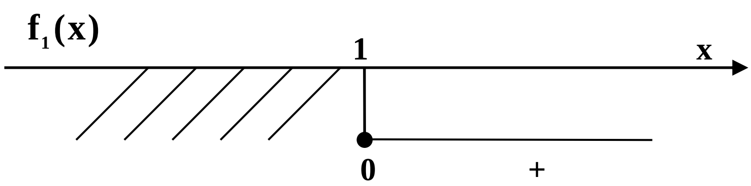
OSSERVAZIONI:

è opportuno togliere il modulo tenendo presente le limitazioni che esso comporta.

$$\mathbf{f(x) = |x^3 - 1| = \begin{cases} f_1(x) = x^3 - 1 \quad \text{per} \quad x^3 - 1 \geq 0 \rightarrow x^3 \geq 1 \rightarrow x \geq 1 \\ f_2(x) = -x^3 + 1 \quad \text{per} \quad x^3 - 1 < 0 \rightarrow x^3 < 1 \rightarrow x < 1 \end{cases}}$$

3) **Studio del segno della funzione $\mathbf{f_1(x)}$ in $\mathbf{[1;+\infty[}$**:

La funzione $\mathbf{f_1(x)}$ è positiva in $\mathbf{]1;+\infty[}$, mentre è nulla per $\mathbf{x = 1}$, ossia:



4) **Intersezione con gli assi cartesiani della funzione $\mathbf{f_1(x)}$**:

La funzione $\mathbf{f_1(x)}$ interseca l'asse delle ascisse nel punto $\mathbf{A(1;0)}$.

5) **Asintoti della funzione $\mathbf{f_1(x)}$**:

La funzione $\mathbf{f_1(x)}$ essendo razionale intera non ha asintoti.

Si osserva che: $\mathbf{\lim_{x \to +\infty} (x^3 - 1) = +\infty}$.

6) <u>Crescenza o decrescenza</u> della funzione $f_1(x)$:

Calcolando la derivata prima della funzione $f_1(x)$ si ha:

$f_1'(x) = 3x^2$.

Studiando il segno della derivata prima se ne deduce che $f_1'(x) > 0$ in $[1;+\infty[$, quindi la $f_1(x)$ è crescente dove è definita, ossia in $[1;+\infty[$. Inoltre, non presenta estremanti. Il punto $A(1;0)$ è un minimo assoluto.

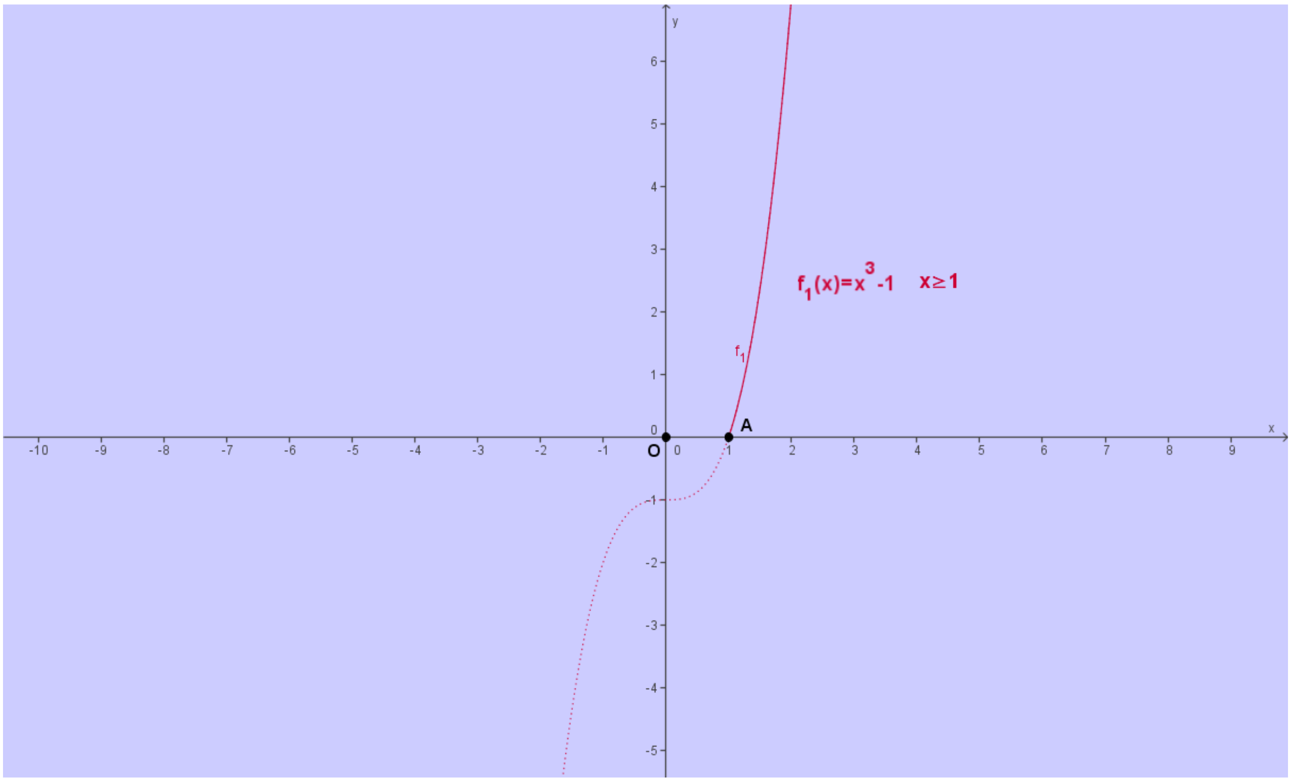
7) <u>Concavità e convessità</u> della funzione $f_1(x)$:

Calcolando la derivata seconda della funzione $f_1(x)$ si ha:

$f_1''(x) = 6x$.

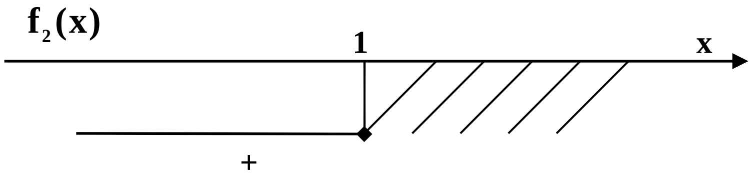
Studiando il segno della derivata seconda se ne deduce che $f_1''(x) > 0$ in $[1;+\infty[$, quindi la $f_1(x)$ è concava verso l'alto dove è definita, ossia in $[1;+\infty[$. Inoltre, non ha punti di inflessione.

8) <u>Grafico</u> della funzione $f_1(x)$:



3) <u>Studio del segno</u> della funzione $f_2(x)$ in $]-\infty;1[$:

La funzione $f_2(x)$ è positiva in $]-\infty;1[$, ossia:



4) <u>Intersezione con gli assi cartesiani</u> della funzione $f_1(x)$:

La funzione $f_2(x)$ interseca l'asse delle ordinate nel punto $B(0;1)$.

5) <u>Asintoti</u> della funzione $f_2(x)$:

La funzione $f_2(x)$ essendo razionale intera non ha asintoti.

Si osserva che: $\lim_{x\to-\infty}(-x^3+1)=+\infty$.

Inoltre, si ha: $\lim_{x\to1^-}(-x^3+1)=0^+$.

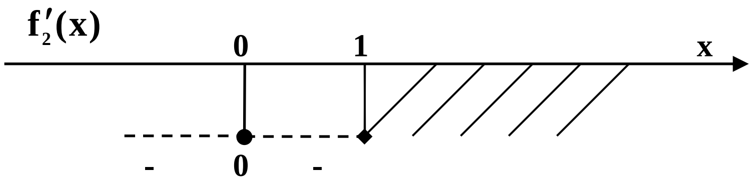
6) <u>Crescenza o decrescenza</u> della funzione $f_2(x)$:

Calcolando la derivata prima della funzione $f_2(x)$ si ha:

$f_2'(x)=-3x^2$.

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$-3x^2\geq0\rightarrow x^2\leq0$, la disequazione è verificata solo per $x=0$, ossia:



Se ne deduce che $f_2'(x)<0$ in $]-\infty;0[\cup]0;1[$, quindi la $f_2(x)$ è ivi decrescente, mentre $f_2'(x)=0$ per $x=0$.

7) <u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u> della funzione $f_2(x)$:

La funzione $f_2(x)$ presenta nel punto $B(0;1)$ un flesso discendente a tangente orizzontale.

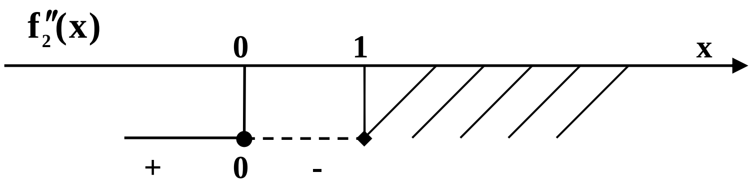
8) **<u>Concavità e convessità</u> della funzione $f_2(x)$:**

Calcolando la derivata seconda della funzione $f_2(x)$ si ha:

$f_2''(x) = -6x$.

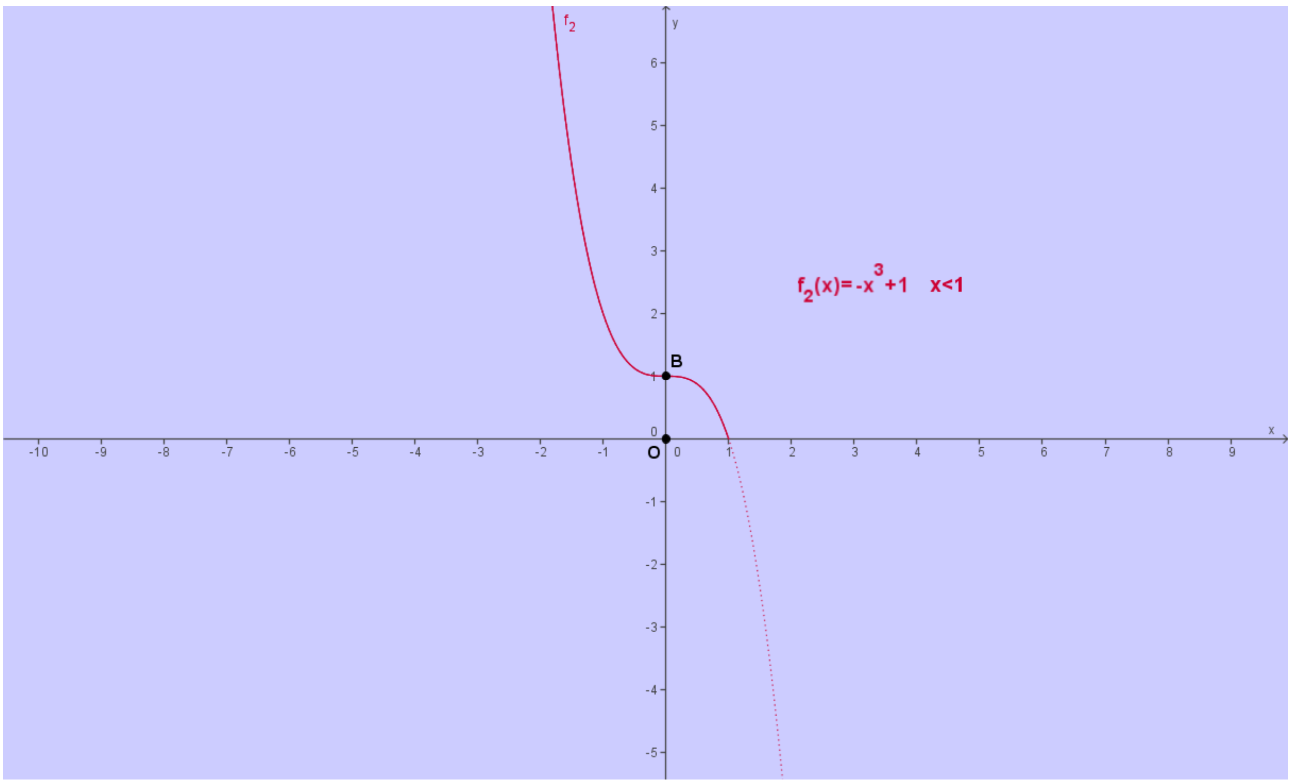
Studiando il segno della derivata seconda si ha:

$-6x \geq 0 \rightarrow x \leq 0$, ossia:



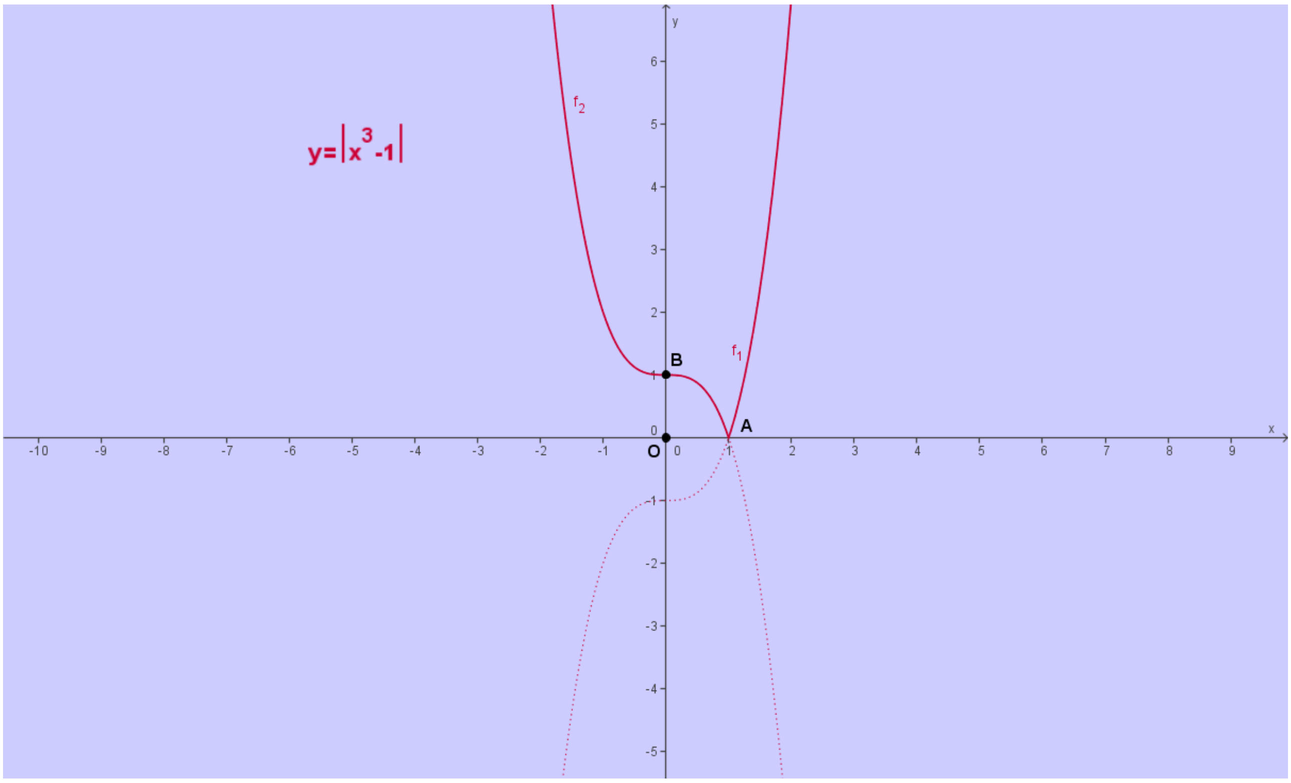
Se ne deduce che $f_2''(x) > 0$ in $]-\infty;0[$, quindi la $f_2(x)$ è ivi concava verso l'alto, mentre $f_2''(x) < 0$ in $]0;1[$, quindi la $f_2(x)$ è ivi concava verso il basso, infine $f_2(x) = 0$ per $x = 0$. Pertanto, oltre al punto di flesso precedentemente trovato, la funzione non presenta punti di inflessione a tangente obliqua.

9) **<u>Grafico</u> della funzione $f_2(x)$:**



OSSERVAZIONI FINALI:

Il grafico della funzione $y = |x^3 - 1|$ è dato dalla composizione dei due grafici, precedentemente costruiti, pertanto si ha:



Il punto $A(1;0)$ è un punto di minimo assoluto della funzione $y = |x^3 - 1|$, inoltre è anche un punto angoloso, ossia in A la funzione è continua, ma non è derivabile. Cioè la derivata destra in A è distinta dalla derivata sinistra, quindi la curva ammette in A due tangenti distinte, infatti:

$$\lim_{x\to 1^+} f_1'(x) = \lim_{x\to 1^+} 3x^2 = 3 \neq \lim_{x\to 1^-} f_2'(x) = \lim_{x\to 1^-} (-3x^2) = -3.$$

Torna su