STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE ALGEBRICA RAZIONALE INTERA IN VALORE ASSOLUTO

Esempio B: $$y = |x^2 - 6x|$$

1) Classificazione e C.E.:

Funzione algebrica razionale intera di secondo grado, in valore assoluto. C.E.: $\forall x \in \Re$.

2) Simmetrie :

La funzione non è simmetrica.

OSSERVAZIONI:

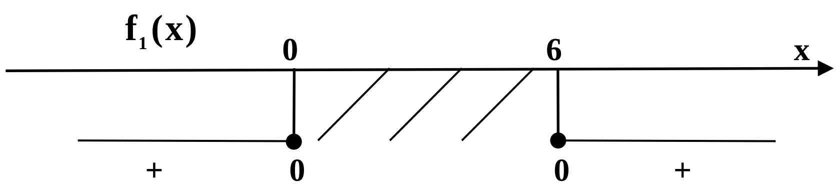
è opportuno togliere il modulo tenendo presente le limitazioni che esso comporta.

$$f(x) = |x^2 - 6x| = \begin{cases} f_1(x) = x^2 - 6x & \text{per} \quad x^2 - 6x \geq 0 \rightarrow x \leq 0, x \geq 6 \\ f_2(x) = -x^2 + 6x & \text{per} \quad x^2 - 6x < 0 \rightarrow 0 < x < 6 \end{cases}$$

3) Studio del segno della funzione $f_1(x)$ in $]-\infty;0] \cup [6;+\infty[$:

La funzione $f_1(x)$ è positiva in $]-\infty;0[\cup]6;+\infty[$, mentre è nulla per $x = 0$ e per $x = 6$,

ossia:



4) Intersezione con gli assi cartesiani della funzione $f_1(x)$:

La funzione $f_1(x)$ passa per l'origine degli assi cartesiani, inoltre interseca l'asse delle ascisse nel punto $A(6;0)$.

5) <u>Asintoti</u> della funzione $f_1(x)$:

La funzione $f_1(x)$ essendo razionale intera non ha asintoti.

Si osserva che: $\lim_{x \to \pm\infty} (x^2 - 6x) = +\infty$.

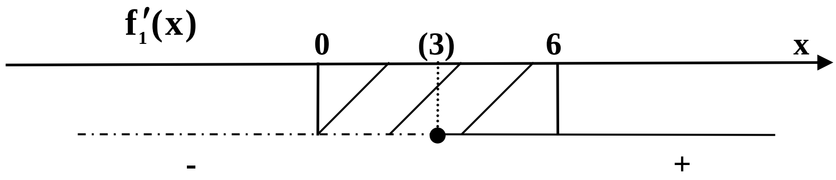
6) <u>Crescenza o decrescenza</u> della funzione $f_1(x)$:

Calcolando la derivata prima della funzione $f_1(x)$ si ha:

$f_1'(x) = 2x - 6$.

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$2x - 6 \geq 0 \to x \geq 3$, ossia:



se ne deduce che $f_1'(x) > 0$ in $[6;+\infty[$, quindi la $f_1(x)$ è ivi crescente, mentre $f_1'(x) < 0$ in $]-\infty;0]$, quindi la $f_1(x)$ è ivi decrescente. Inoltre, non presenta estremanti. I punti $O(0;0)$ e $A(6;0)$ sono punti di minimo assoluto per la funzione $f_1(x)$.

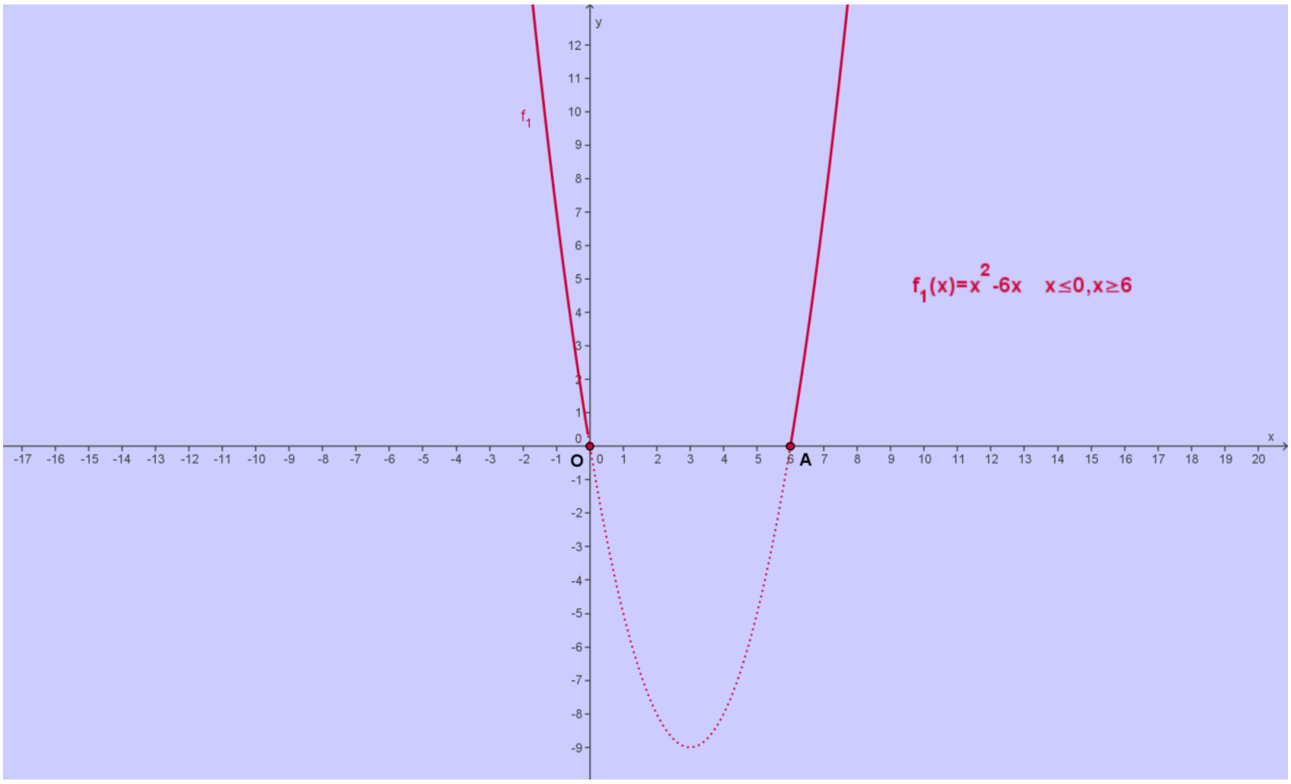
7) <u>Concavità e convessità</u> della funzione $f_1(x)$:

Calcolando la derivata seconda della funzione $f_1(x)$ si ha:

$f_1''(x) = 2$.

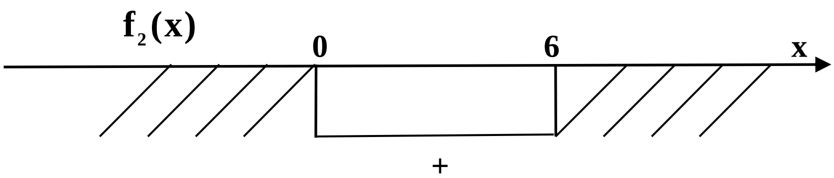
Studiando il segno della derivata seconda se ne deduce che $f_1''(x) > 0$ in $]-\infty;0] \cup [6;+\infty[$, quindi la $f_1(x)$ è concava verso l'alto dove è definita. Inoltre, non ha punti di inflessione.

8) <u>Grafico</u> della funzione $f_1(x)$:



3) <u>Studio del segno</u> della funzione $f_2(x)$ in $]0;6[$:

La funzione $f_2(x)$ è positiva in $]0;6[$, ossia:



4) <u>Intersezione con gli assi cartesiani</u> della funzione $f_2(x)$:

Non esistono intersezioni.

5) <u>Asintoti</u> della funzione $f_2(x)$:

La funzione $f_2(x)$ essendo razionale intera non ha asintoti.

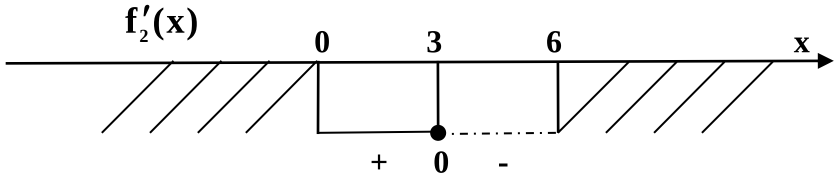
Si osserva che: $\lim_{x\to 0^+}(-x^2+6x)=\lim_{x\to 6^-}(-x^2+6x)=0^+$.

6) <u>Crescenza o decrescenza</u> della funzione $f_2(x)$:

Calcolando la derivata prima della funzione $f_2(x)$ si ha:

$f_2'(x)=-2x+6$.

Studiando il segno della derivata prima si ha: $-2x+6 \geq 0 \rightarrow x \leq 3$, ossia:



Se ne deduce che $f'_2(x) > 0$ in $]0;3[$, quindi la $f_2(x)$ è ivi crescente, mentre $f'_2(x) < 0$ in $]3;6[$, quindi la $f_2(x)$ è ivi decrescente, infine la $f'_2(x) = 0$ per $x = 3$.

7) **<u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u> della funzione** $f_2(x)$:

La funzione $f_2(x)$ presenta nel punto $B(3;9)$ un massimo relativo (che è anche assoluto).

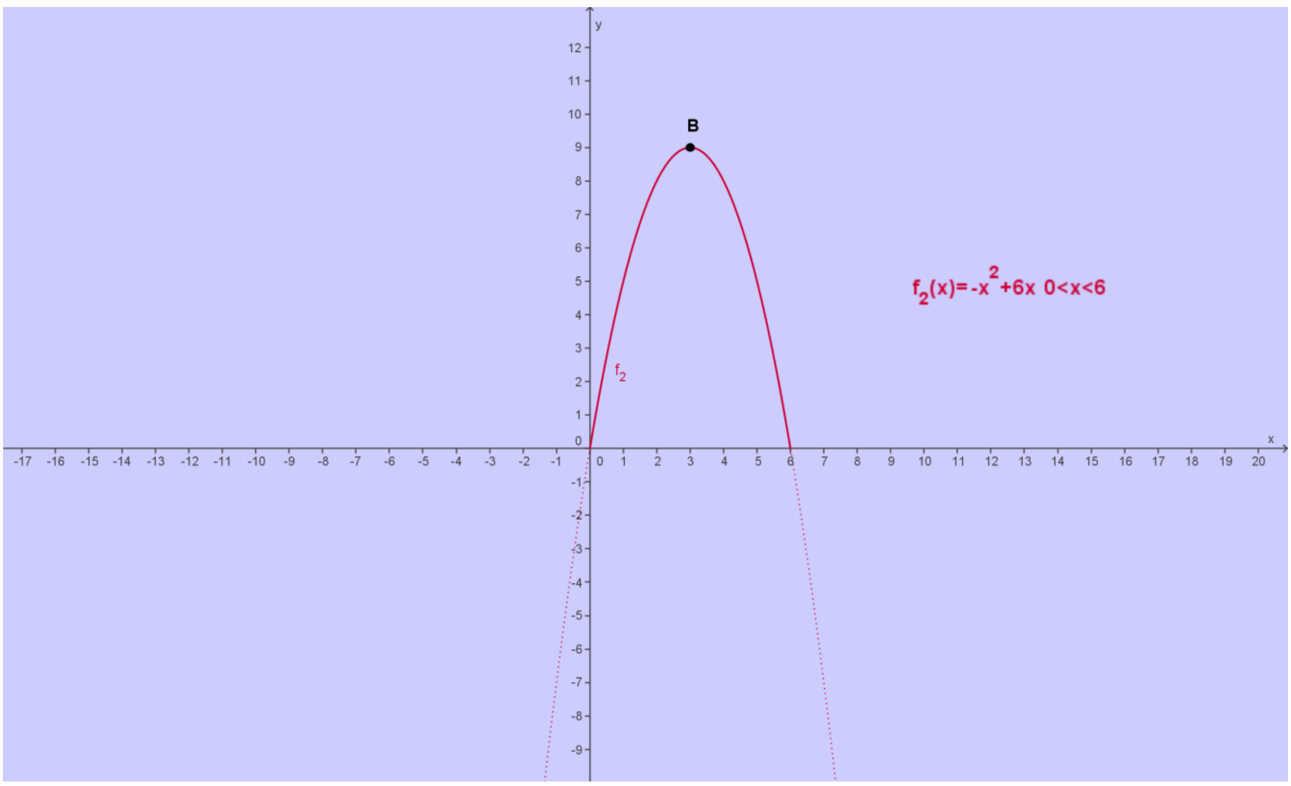
8) **<u>Concavità e convessità</u> della funzione** $f_2(x)$:

Calcolando la derivata seconda della funzione $f_2(x)$ si ha:

$f''_2(x) = -2$.

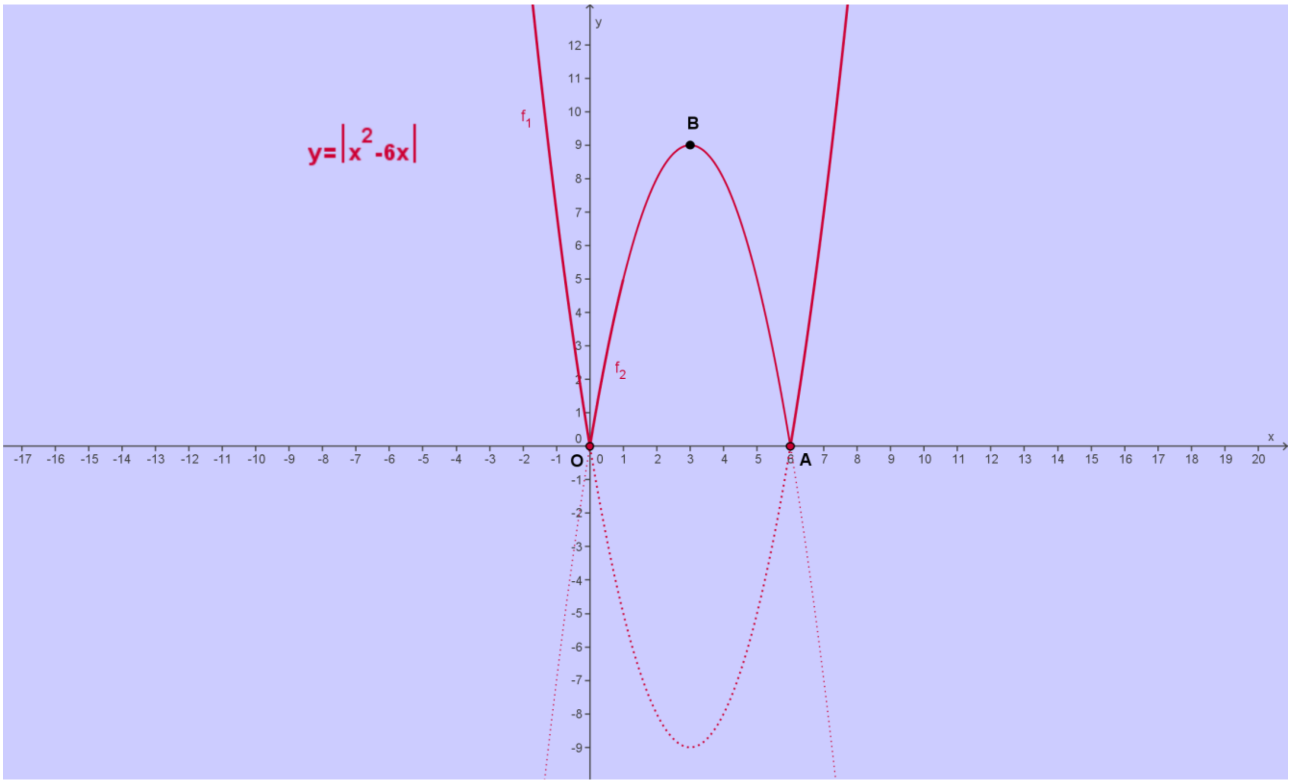
Studiando il segno della derivata seconda se ne deduce che $f''_2(x) < 0$ in $]0;6[$, quindi la $f_2(x)$ è concava verso il basso dove è definita. Inoltre, non ha punti di inflessione.

9) **<u>Grafico</u> della funzione** $f_2(x)$:



OSSERVAZIONI FINALI:

Il grafico della funzione $y = |x^2 - 6x|$ è dato dalla composizione dei due grafici, precedentemente costruiti, pertanto si ha:



I punti $A(6;0)$ e $O(0;0)$ sono punti di minimo assoluto della funzione $y = |x^2 - 6x|$, inoltre sono anche punti angolosi, ossia in A e in O la funzione è continua, ma non è derivabile. Infine, il punto $B(3;9)$ è un punto di massimo relativo.

Torna su