Analisi

Classe quinta

STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE CON UN VALORE ASSOLUTO

Esempio C: $y = (|x| + x - 2)e^x$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione trascendente esponenziale (mista) con un termine in valore assoluto. C.E.: $\forall x \in \Re$.

2) **Simmetrie** :

La funzione non è simmetrica.

OSSERVAZIONI:

è opportuno togliere il modulo tenendo presente le limitazioni che esso comporta.

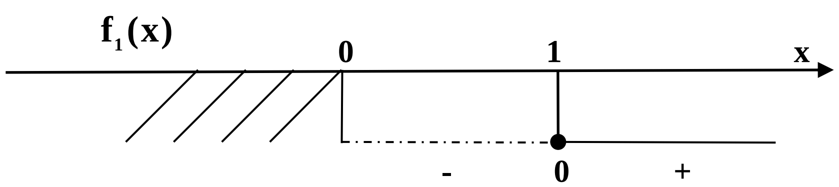
$$f(x) = (|x| + x - 2)e^x = \begin{cases} f_1(x) = (2x - 2)e^x & \text{per} \quad x \geq 0 \\ f_2(x) = -2e^x & \text{per} \quad x < 0 \end{cases}$$

3) **Studio del segno della funzione $f_1(x)$ in $[0;+\infty[$** :

Studiando il segno della funzione $f_1(x)$ si ha:

$(2x - 2)e^x \geq 0 \rightarrow 2x - 2 \geq 0 \rightarrow x \geq 1$ (Si ricorda che la quantità e^x è sempre positiva),

quindi si ottiene:



Pertanto, la $f_1(x)$ è positiva in $]1;+\infty[$, mentre la $f_1(x)$ è negativa in $[0;1[$, infine la $f_1(x)$ è nulla per $x = 1$.

4) **<u>Intersezione con gli assi cartesiani</u> della funzione $\mathbf{f_1(x)}$**:

La funzione $\mathbf{f_1(x)}$ interseca l'asse delle ordinate nel punto $\mathbf{A(0;-2)}$, invece interseca l'asse delle ascisse nel punto $\mathbf{B(1;0)}$.

5) **<u>Asintoti</u> della funzione $\mathbf{f_1(x)}$**:

La funzione $\mathbf{f_1(x)}$ non ha asintoti, infatti:

$$\lim_{x\to+\infty}[(2x-2)e^x]=+\infty,$$

quindi non esiste l'asintoto orizzontale, inoltre si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x-2)e^x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x-2}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}e^x=2(+\infty)=+\infty,$$

quindi non esiste l'asintoto obliquo.

6) **<u>Crescenza o decrescenza</u> della funzione $\mathbf{f_1(x)}$**:

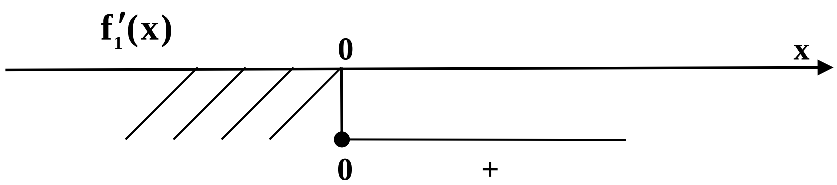
Calcolando la derivata prima della funzione $\mathbf{f_1(x)}$ si ha:

$\mathbf{f_1'(x)=2e^x+(2x-2)e^x}$, ossia:

$\mathbf{f_1'(x)=2xe^x}$

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$\mathbf{2xe^x\ge 0\rightarrow x\ge 0}$, ossia:



se ne deduce che $\mathbf{f_1'(x)>0}$ in $\mathbf{]0;+\infty[}$, quindi la $\mathbf{f_1(x)}$ è ivi crescente. Il punto $\mathbf{A(0;-2)}$ è il minimo assoluto per la funzione $\mathbf{f_1(x)}$.

7) <u>Concavità e convessità</u> della funzione $f_1(x)$:

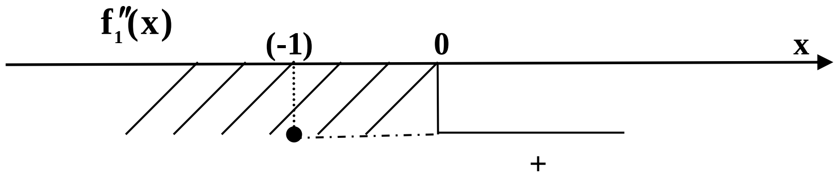
Calcolando la derivata seconda della funzione $f_1(x)$ si ha:

$$f_1''(x) = 2(x+1)e^x.$$

Studiando il segno della derivata seconda si ha:

$$2(x+1)e^x \geq 0 \rightarrow x+1 \geq 0 \rightarrow x \geq -1,$$

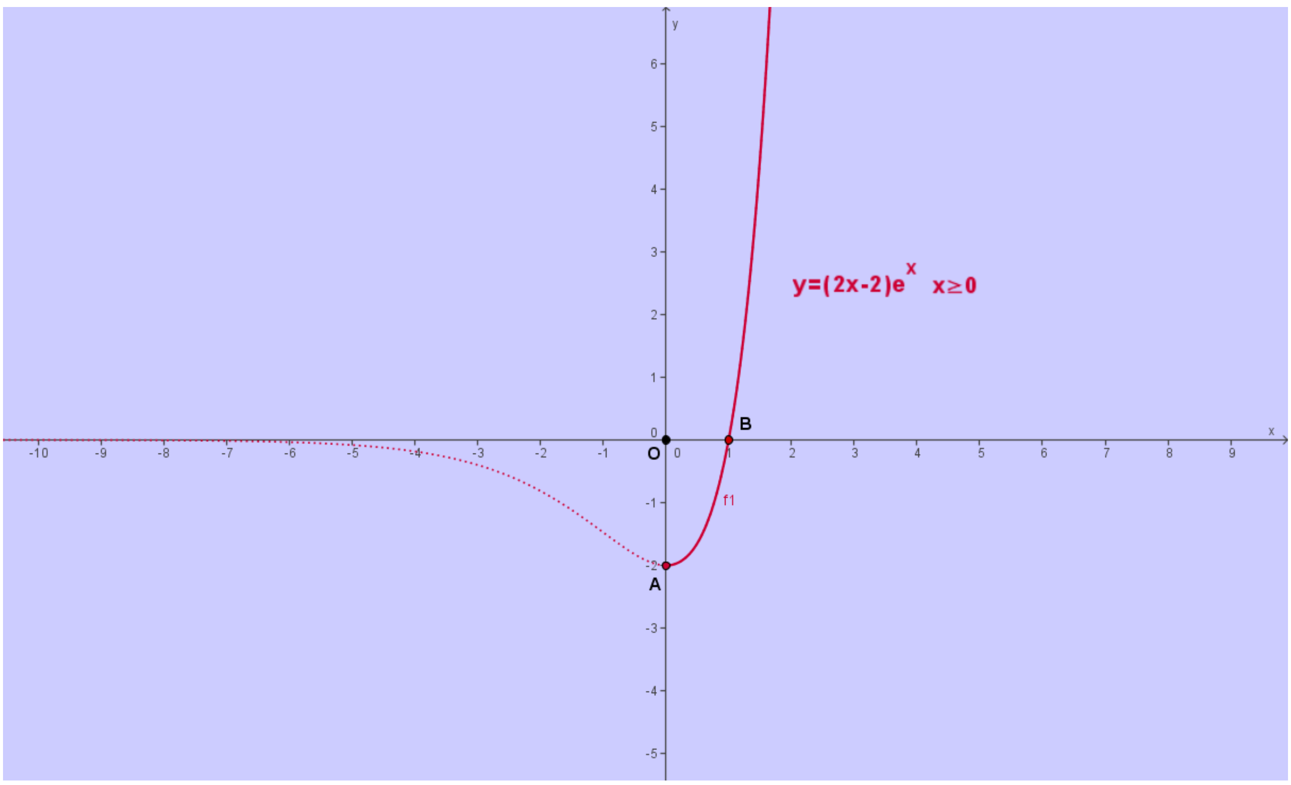
ossia:



se ne deduce che $f_1''(x) > 0$ in $[0;+\infty[$, quindi la $f_1(x)$ è concava verso l'alto dove è definita.

Inoltre, la $f_1(x)$ non ha punti di inflessione.

8) <u>Grafico</u> della funzione $f_1(x)$:



3) **<u>Studio del segno</u> della funzione $\mathbf{f_2(x)}$ in $\mathbf{]-\infty;0[}$**:

La funzione $\mathbf{f_2(x) = -2e^x}$ è negativa in $\mathbf{]-\infty;0[}$, ossia:

4) **<u>Intersezione con gli assi cartesiani</u> della funzione $\mathbf{f_2(x)}$**:

Non esistono intersezioni.

5) **<u>Asintoti</u> della funzione $\mathbf{f_2(x)}$**:

La funzione $\mathbf{f_2(x)}$ è asintotica all'asse delle ascisse, infatti:

$\lim_{x\to-\infty}(-2e^x) = 0^-$, quindi $y = 0$ è l'equazione dell'asintoto orizzontale.

Inoltre si osserva che $\lim_{x\to 0^-}(-2e^x) = -2^-$.

6) **<u>Crescenza o decrescenza</u> della funzione $\mathbf{f_2(x)}$**:

Calcolando la derivata prima della funzione $\mathbf{f_2(x)}$ si ha:

$f_2'(x) = -2e^x$.

Studiando il segno della derivata prima se ne deduce che la $f_2'(x) < 0$ in $]-\infty;0[$, quindi la $\mathbf{f_2(x)}$ è decrescente dove è definita.

7) **<u>Massimi, minimi relativi e flessi a tangente orizzontale</u> della funzione $\mathbf{f_2(x)}$**:

La funzione $\mathbf{f_2(x)}$ non presenta estremanti.

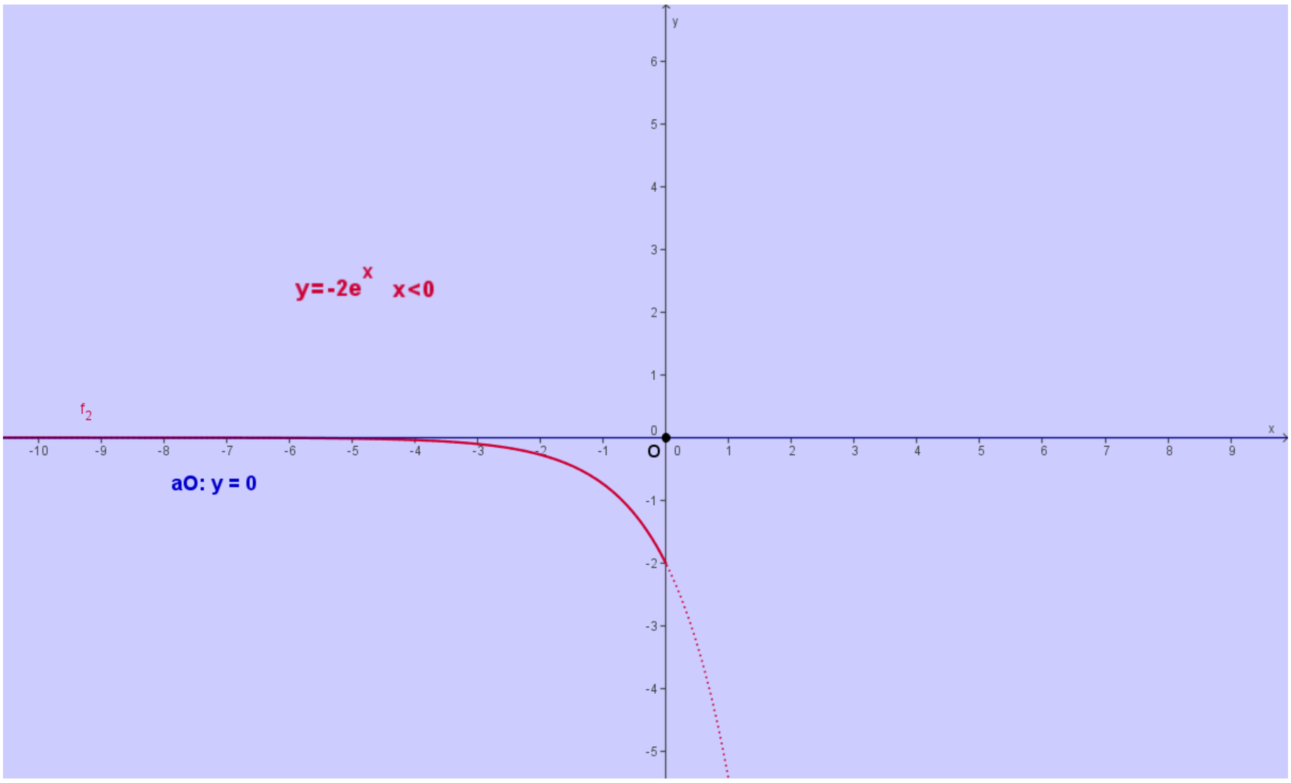
8) **<u>Concavità e convessità</u> della funzione $\mathbf{f_2(x)}$**:

Calcolando la derivata seconda della funzione $\mathbf{f_2(x)}$ si ha:

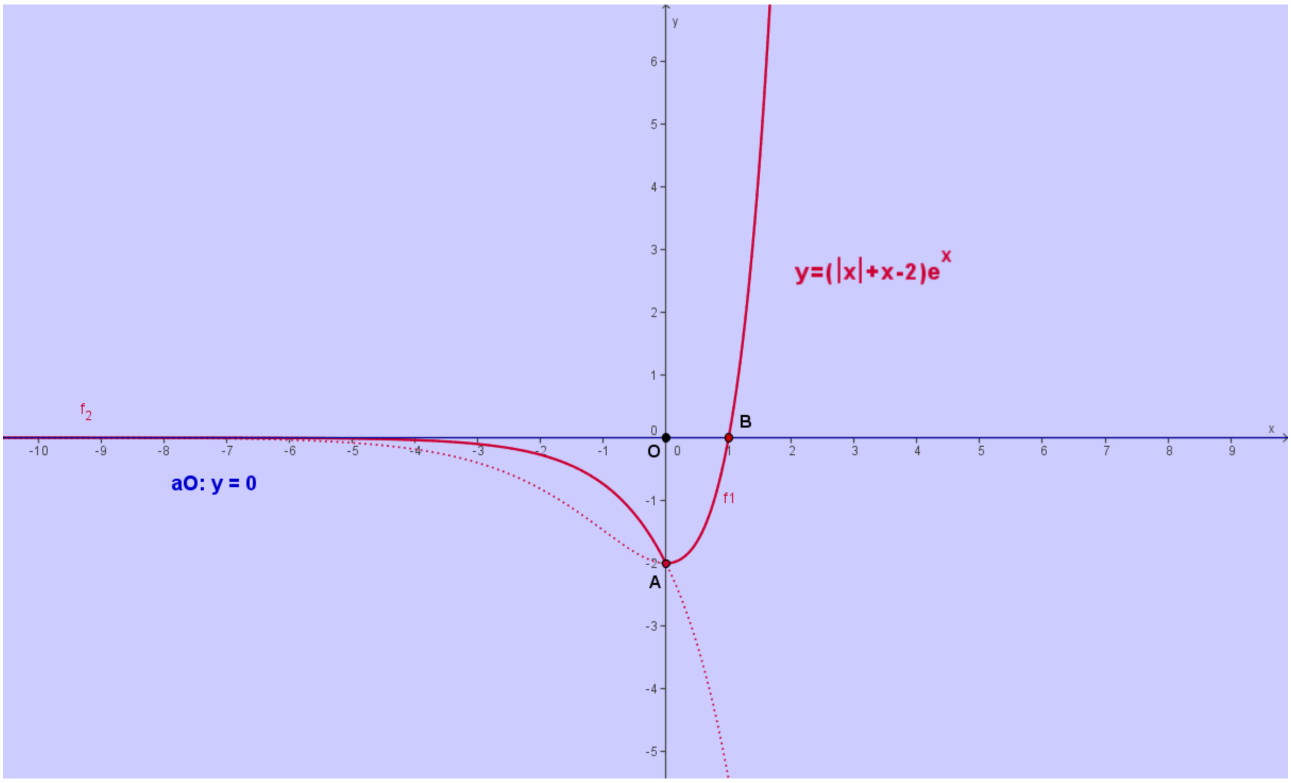
$f_2''(x) = -2e^x$.

Studiando il segno della derivata seconda se ne deduce che $f_2''(x) < 0$ in $]-\infty;0[$, quindi la $\mathbf{f_2(x)}$ è concava verso il basso dove è definita. Inoltre, non ha punti di inflessione.

9) **<u>Grafico</u> della funzione $f_2(x)$**:



OSSERVAZIONI FINALI: Il grafico della funzione $\mathbf{y = (|x| + x - 2)e^x}$ è dato dalla composizione dei due grafici, precedentemente costruiti, inoltre il punto angoloso $\mathbf{A}$ è il punto di minimo assoluto della funzione data, pertanto si ha:



Torna su