Analisi

Classe quinta

STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE CON UN VALORE ASSOLUTO

Esempio D: $y = \ln(|x-1| + 2x)$

OSSERVAZIONI:

è opportuno togliere il modulo tenendo presente le limitazioni che esso comporta.

$$f(x) = \ln(|x-1| + 2x) = \begin{cases} f_1(x) = \ln(x-1+2x) \quad \text{per} \quad x-1 \geq 0 \\ f_2(x) = \ln(-x+1+2x) \quad \text{per} \quad x-1 < 0 \end{cases}$$

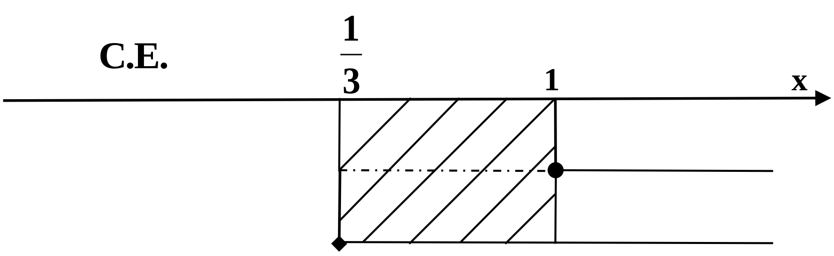
Ossia:

$$f(x) = \ln(|x-1| + 2x) = \begin{cases} f_1(x) = \ln(3x-1) \quad \text{per} \quad x \geq 1 \\ f_2(x) = \ln(x+1) \quad \text{per} \quad x < 1 \end{cases}$$

Studio della funzione $f_1(x) = \ln(3x-1)$ **per** $x \geq 1$

1) Classificazione e C.E.:

Funzione trascendente logaritmica. La presenza del logaritmo impone che sia $3x - 1 > 0 \rightarrow x > \frac{1}{3}$. Quindi per determinare il campo di esistenza, bisogna considerare le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x \geq 1 \\ x > \frac{1}{3} \end{cases}$ ossia:



Pertanto, il C.E. è $[1;+\infty[$.

2) Simmetrie :

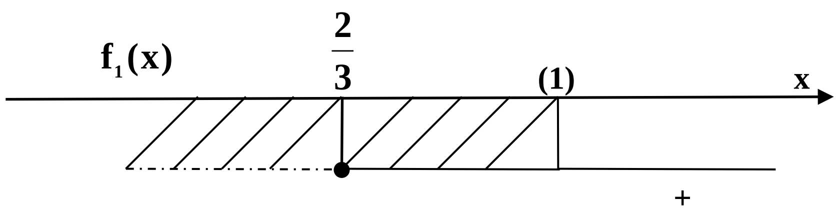
La funzione non è simmetrica.

3) Studio del segno

Studiando il segno della funzione $\mathbf{f_1(x)}$ si ha:

$$\ln(3x-1) \geq 0 \rightarrow 3x-1 \geq 1 \rightarrow x \geq \frac{2}{3}$$

quindi si ottiene:



Pertanto, la $\mathbf{f_1(x)}$ è sempre positiva dove è definita, cioè in $[1;+\infty[$.

4) Intersezione con gli assi cartesiani:

La funzione $\mathbf{f_1(x)}$ non interseca gli assi cartesiani.

5) Asintoti:

La funzione $\mathbf{f_1(x)}$ non ha asintoti, infatti:

$$\lim_{x\to+\infty} \ln(3x-1) = +\infty,$$

quindi non esiste l'asintoto orizzontale, inoltre si ha:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x-1)}{x} = \frac{\infty}{\infty}$$, forma indeterminata.

Pertanto, ha senso scrivere:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3x-1)}{x} \overset{H}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{3}{3x-1} = 0^+,$$

quindi non esiste l'asintoto obliquo.

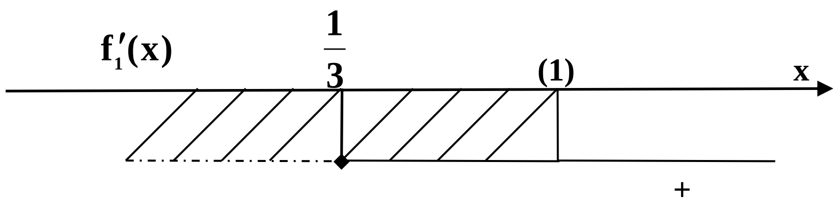
6) **Crescenza o decrescenza**:

Calcolando la derivata prima della funzione $f_1(x)$ si ha:

$$f_1'(x) = \frac{3}{3x-1}.$$

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$\frac{3}{3x-1} \geq 0 \rightarrow x > \frac{1}{3}$, ossia:



se ne deduce che $f_1'(x) > 0$ in $[1;+\infty[$, quindi la $f_1(x)$ è crescente dove è definita. Il punto $A(1;\ln 2)$ è il minimo assoluto per la funzione $f_1(x)$.

7) **Concavità e convessità**:

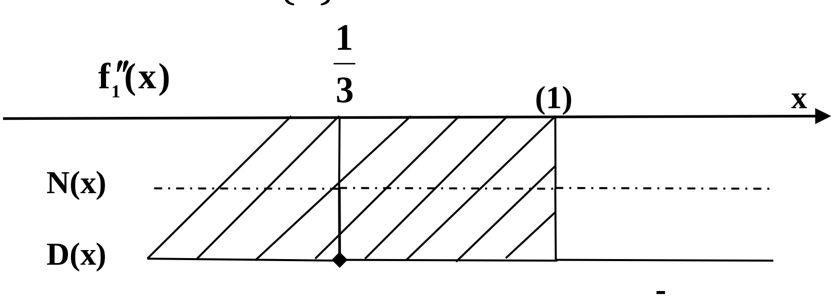
Calcolando la derivata seconda della funzione $f_1(x)$ si ha:

$$f_1''(x) = \frac{-9}{(3x-1)^2}.$$

Studiando il segno della derivata seconda si ha:

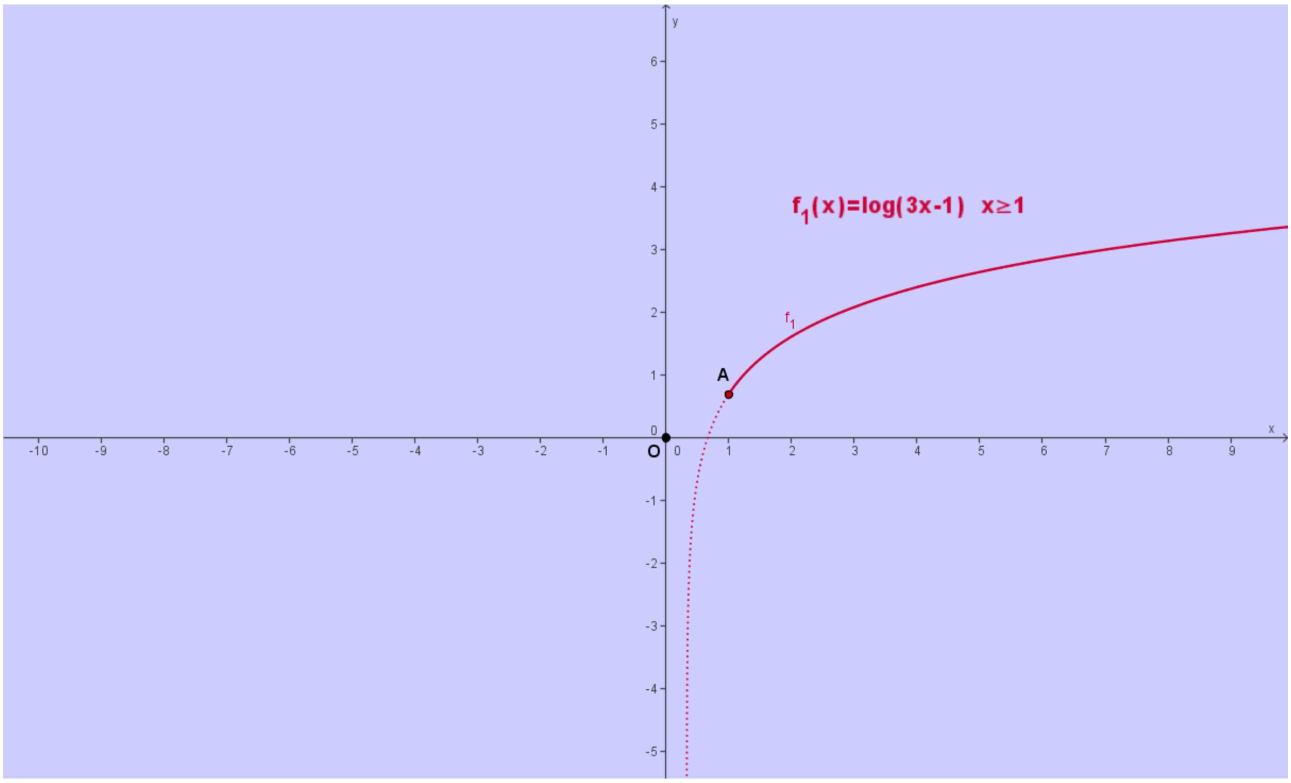
$N(x): -9 < 0 \ \ \forall x \in \Re$

$D(x): (3x-1)^2 > 0 \ \ \forall x \in \Re - \left\{\frac{1}{3}\right\}$, ossia:



se ne deduce che $f_1''(x) < 0$ in $[1;+\infty[$, quindi la $f_1(x)$ è concava verso il basso (convessa verso l'alto) dove è definita.

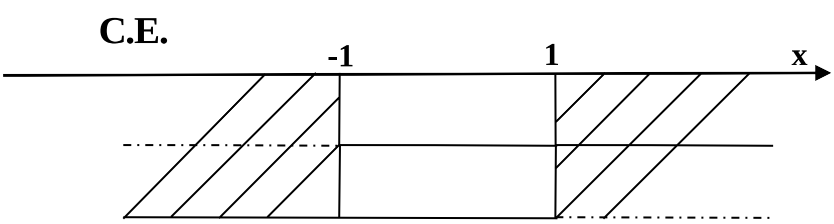
8) **<u>Grafico</u> della funzione** $f_1(x)$:



Studio della funzione $f_2(x) = \ln(x+1)$ **per** $x < 1$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione trascendente logaritmica. La presenza del logaritmo impone che sia $x+1>0 \rightarrow x>-1$. Quindi per determinare il campo di esistenza, bisogna considerare le soluzioni del sistema: $\begin{cases} x>-1 \\ x<1 \end{cases}$ ossia:



Pertanto, il C.E. è $]-1;1[$.

2) **Simmetrie** :

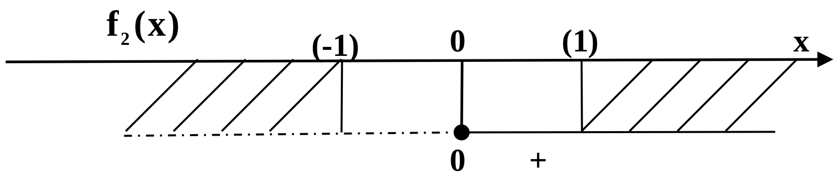
La funzione non è simmetrica.

3) Studio del segno:

Studiando il segno della funzione $\mathbf{f_2(x)}$ si ha:

$$\ln(x+1) \geq 0 \rightarrow x+1 \geq 1 \rightarrow x \geq 0$$

quindi si ottiene:



Pertanto, la $\mathbf{f_2(x)}$ è positiva in $]0;1[$, mentre è negativa in $]-1;0[$, infine è nulla per $x=0$.

4) Intersezione con gli assi cartesiani:

La funzione $\mathbf{f_2(x)}$ passa per l'origine degli assi cartesiani.

5) Asintoti:

La funzione $\mathbf{f_2(x)}$ ha un asintoto verticale, infatti:

$$\lim_{x \to -1^+} \ln(x+1) = -\infty .$$

Inoltre, si osserva che $\lim_{x \to 1^-} \ln(x+1) = \ln 2$.

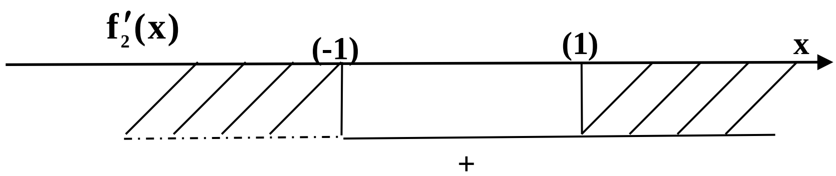
6) Crescenza o decrescenza:

Calcolando la derivata prima della funzione $\mathbf{f_2(x)}$ si ha:

$$f_2'(x) = \frac{1}{x+1} .$$

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$$\frac{1}{x+1} > 0 \rightarrow x > -1$$, ossia:



se ne deduce che $\mathbf{f_2'(x) > 0}$ in $]-1;1[$, quindi la $\mathbf{f_2(x)}$ è crescente nel suo campo di esistenza.

7) **Concavità e convessità**:

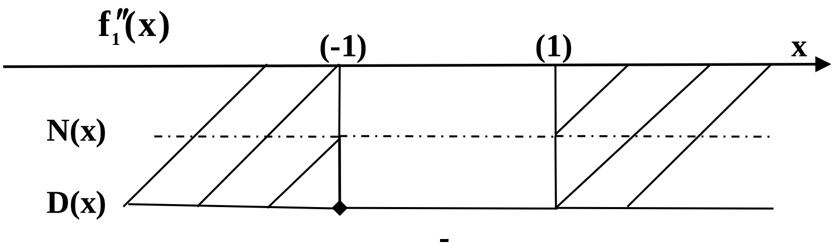
Calcolando la derivata seconda della funzione $\mathbf{f_2(x)}$ si ha:

$$\mathbf{f_2''(x)=\frac{-1}{(x+1)^2}}\,.$$

Studiando il segno della derivata seconda si ha:

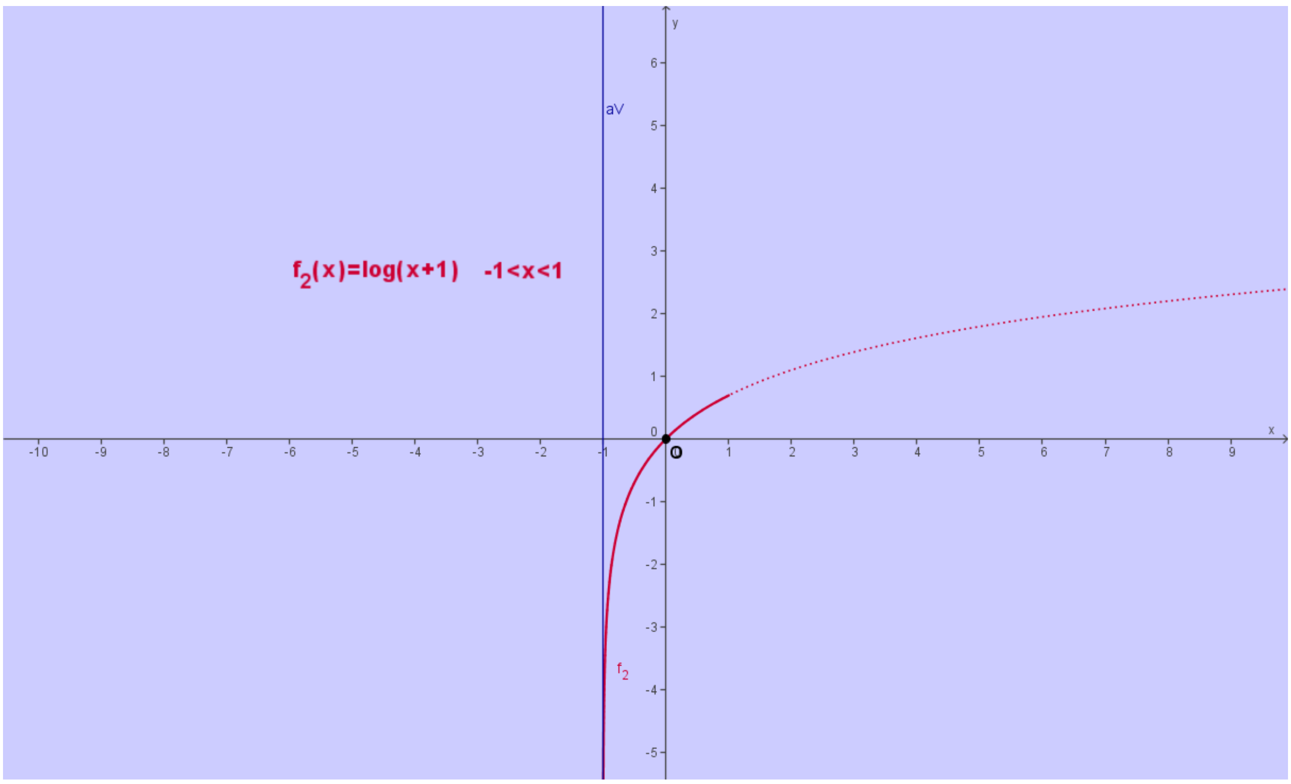
$$\mathbf{N(x):-1<0\ \ \forall x\in\Re}$$

$\mathbf{D(x):(x+1)^2>0\ \ \forall x\in\Re-\{-1\}}$, ossia:

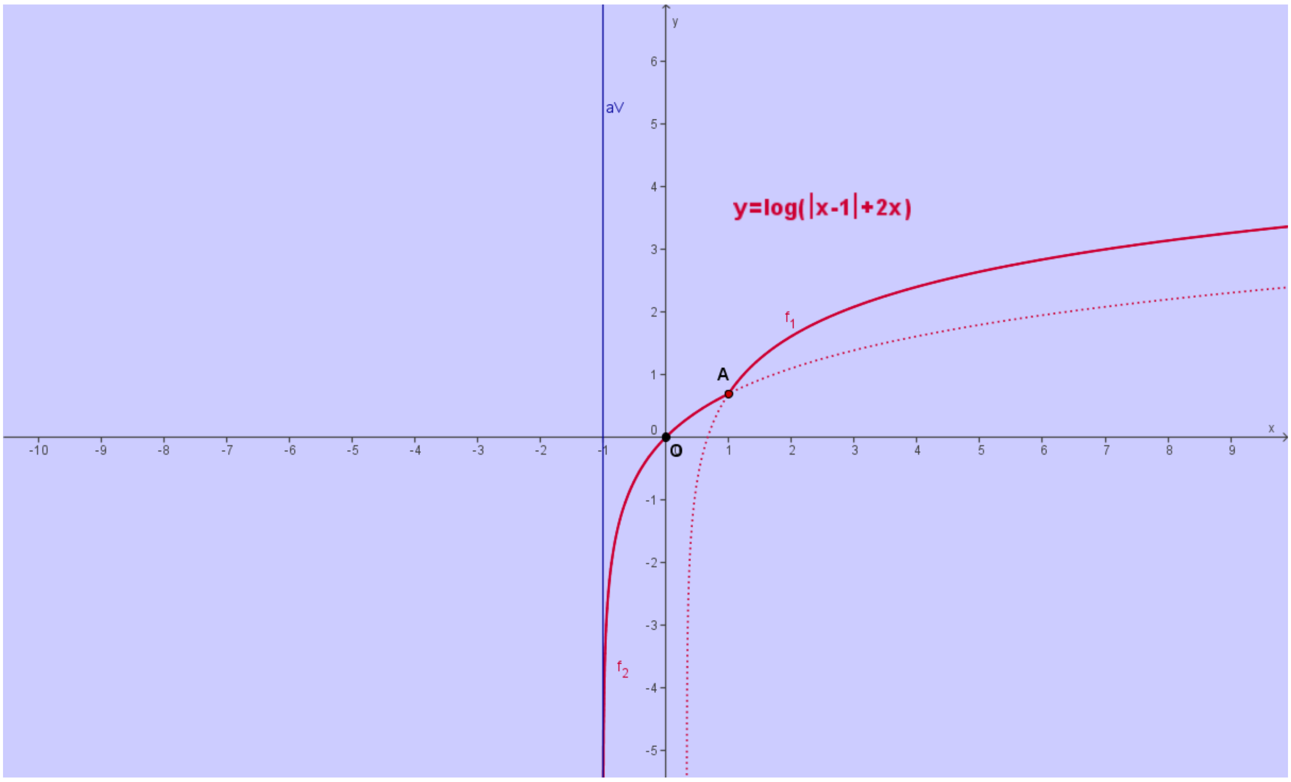


se ne deduce che $\mathbf{f_2''(x)<0}$ in $\mathbf{]-1;1[}$, quindi la $\mathbf{f_2(x)}$ è concava verso il basso (convessa verso l'alto) nel suo campo di esistenza.

8) **Grafico**:



OSSERVAZIONI FINALI: Il grafico della funzione $\mathbf{y = \ln(|x-1| + 2x)}$ è dato dalla composizione dei due grafici, precedentemente costruiti, inoltre $\mathbf{A}$ è un punto angoloso della funzione data, pertanto si ha:



Torna su