[Analisi](#)

[Classe quinta](#)

STUDIO COMPLETO

DI UNA FUNZIONE TRASCENDENTE CON UN VALORE ASSOLUTO

Esempio E: $$y = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|$$

1) **Classificazione e C.E.**:

Funzione trascendente logaritmica.

OSSERVAZIONI:

è opportuno togliere il modulo tenendo presente le limitazioni che esso comporta.

$$f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \begin{cases} f_1(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} & \text{per} \quad \frac{1+x}{1-x} > 0 \rightarrow -1 < x < 1 \\ f_2(x) = \ln\frac{1+x}{x-1} & \text{per} \quad \frac{1+x}{x-1} < 0 \rightarrow x < -1, x > 1 \end{cases}$$ **Ossia:**

$$f(x) = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| = \begin{cases} f_1(x) = \ln\frac{1+x}{1-x} & \text{in} \quad]-1;1[\\ f_2(x) = \ln\frac{1+x}{x-1} & \text{in} \quad]-\infty;-1[\cup]1;+\infty[\end{cases}$$

Pertanto, la funzione data è definita $\forall x \in \Re - \{\pm 1\}$.

2) **Simmetrie** :

Si osserva che sia $f_1(x)$ che $f_2(x)$ sono funzioni dispari, ossia simmetriche rispetto all'origine

degli assi cartesiani, infatti si ha: $f_1(-x) = \ln\frac{1-x}{1+x} = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{-1} = -\ln\frac{1+x}{1-x} = -f_1(x)$.

Analogamente si ha che $f_2(x) = -f_2(-x)$.

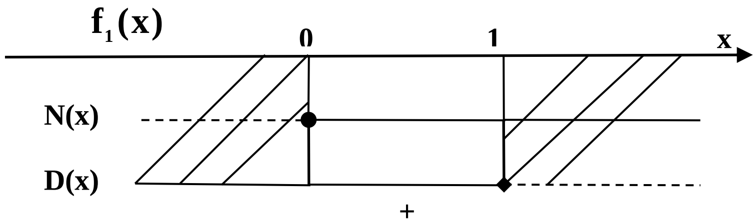
Quindi, si possono studiare la $f_1(x)$ in $]0;1[$ e la $f_2(x)$ in $]1+\infty[$, e alla fine costruire il grafico per simmetria.

Studio della funzione $f_1(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}$ **in** $]0;1[$

3) **Studio del segno**

Studiando il segno della funzione $f_1(x)$ si ha:

$$\ln\frac{1+x}{1-x}\geq 0\rightarrow\frac{1+x}{1-x}\geq 1\rightarrow\frac{2x}{1-x}\geq 0\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}N(x):2x\geq 0\rightarrow x\geq 0\\D(x):1-x>0\rightarrow x<1\end{array}\right.$$ quindi si ottiene:



Pertanto, la $f_1(x)$ è sempre positiva nell'intervallo dove è studiata, cioè in $]0;1[$.

4) **Intersezione con gli assi cartesiani**:

La funzione $f_1(x)$ non interseca gli assi cartesiani dove è studiata.

5) **Asintoti**:

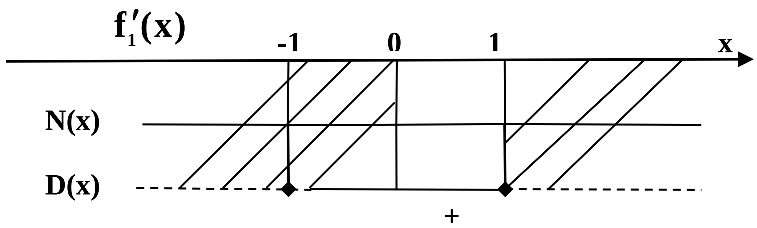
La funzione $f_1(x)$ ha un asintoto verticale, infatti: $\lim_{x\rightarrow 1^-}\ln\frac{1+x}{1-x}=+\infty$ quindi $x=1$ è l'equazione dell'asintoto verticale. Inoltre, si osserva che $\lim_{x\rightarrow 0^+}\ln\frac{1+x}{1-x}=0^+$.

6) **Crescenza o decrescenza**:

Calcolando la derivata prima della funzione $f_1(x)$ si ha: $f_1'(x)=\frac{2}{1-x^2}$.

Studiando il segno della derivata prima si ha:

$$\frac{2}{1-x^2}>0\rightarrow\left\langle\begin{array}{l}N(x):2>0\rightarrow\forall x\\D(x):1-x^2>0\rightarrow -1<x<1\end{array}\right.$$ ossia:



se ne deduce che $\mathbf{f_1'(x) > 0}$ in $\mathbf{]0;1[}$, quindi la $\mathbf{f_1(x)}$ è crescente dove è studiata.

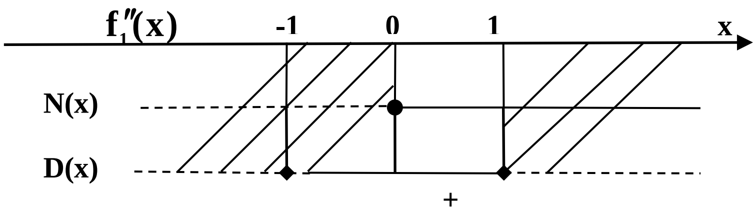
7) **<u>Concavità e convessità</u>**:

Calcolando la derivata seconda della funzione $\mathbf{f_1(x)}$ si ha:

$$\mathbf{f_1''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}}.$$

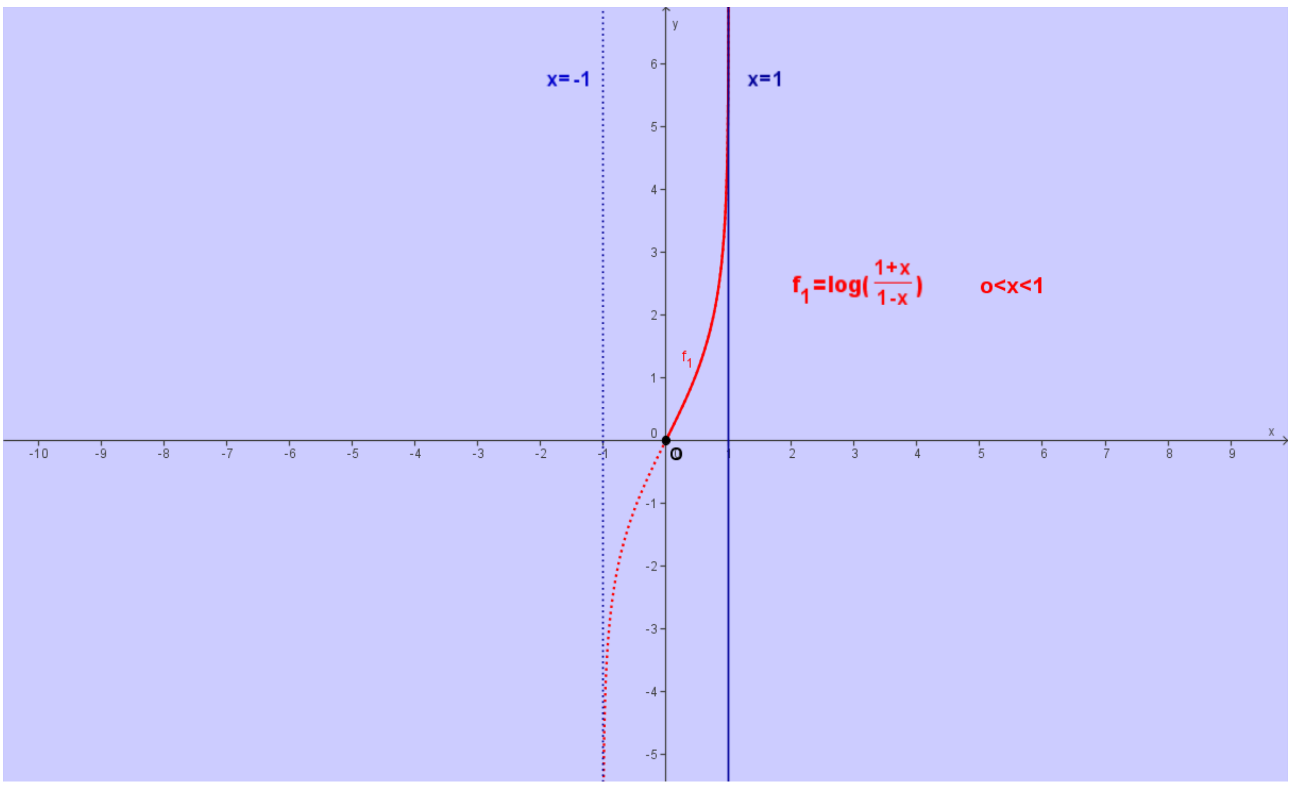
Studiando il segno della derivata seconda si ha:

$$\mathbf{\frac{4x}{(1-x^2)^2} \geq 0 \rightarrow \left\langle \begin{array}{l} N(x): 4x \geq 0 \rightarrow x \geq 0 \\ D(x): (1-x^2)^2 > 0 \rightarrow \forall x - \{\pm 1\} \end{array} \right.}$$ ossia:



se ne deduce che $\mathbf{f_1''(x) > 0}$ in $\mathbf{]0;1[}$, quindi la $\mathbf{f_1(x)}$ è concava verso l'alto dove è studiata.

8) **<u>Grafico</u> della funzione $\mathbf{f_1(x)}$** in $\mathbf{]0;1[}$ (tratteggiato il grafico in $\mathbf{]-1;0[}$) :

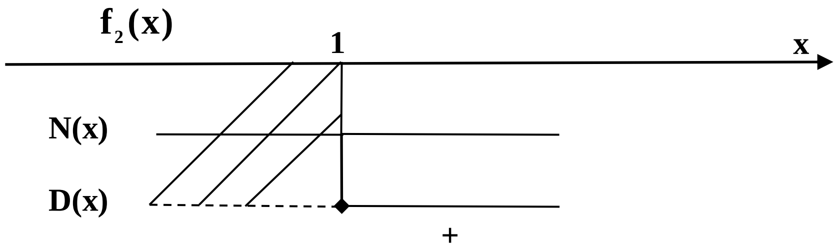


Studio della funzione $f_2(x) = \ln \frac{1+x}{x-1}$ **in** $]1;+\infty[$

3) <u>Studio del segno</u>

Studiando il segno della funzione $f_2(x)$ si ha:

$$\ln \frac{1+x}{x-1} \geq 0 \to \frac{1+x}{x-1} \geq 1 \to \frac{2}{x-1} > 0 \to \left\langle \begin{array}{l} N(x): 2 > 0 \to \forall x \\ D(x): x-1 > 0 \to x > 1 \end{array} \right.$$ quindi si ottiene:



Pertanto, la $f_2(x)$ è sempre positiva nell'intervallo dove è studiata, cioè in $]1;+\infty[$.

4) <u>Intersezione con gli assi cartesiani</u>:

La funzione $f_2(x)$ non interseca gli assi cartesiani dove è studiata.

5) <u>Asintoti</u>:

La funzione $f_2(x)$ ha due asintoti dove è studiata, infatti:

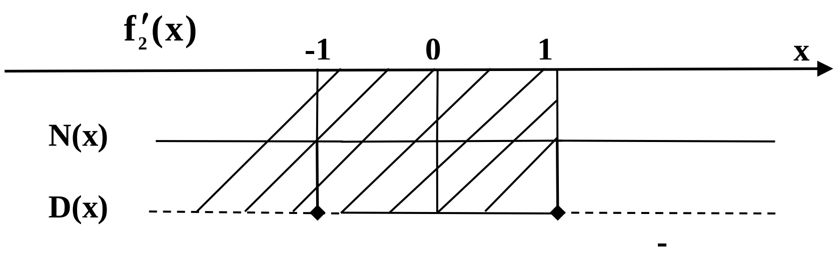
$\lim_{x \to 1^+} \ln \frac{1+x}{x-1} = +\infty$ quindi $x = 1$ è l'equazione dell'asintoto verticale.

Inoltre, $\lim_{x \to +\infty} \ln \frac{1+x}{x-1} = 0^+$ quindi $y = 0$ è l'equazione dell'asintoto orizzontale.

6) <u>Crescenza o decrescenza</u>:

Calcolando la derivata prima della funzione $f_2(x)$ si ha:

$f_2'(x) = \frac{2}{1-x^2}$. Si osserva che $f_1'(x) = f_2'(x)$, pertanto, si ha:



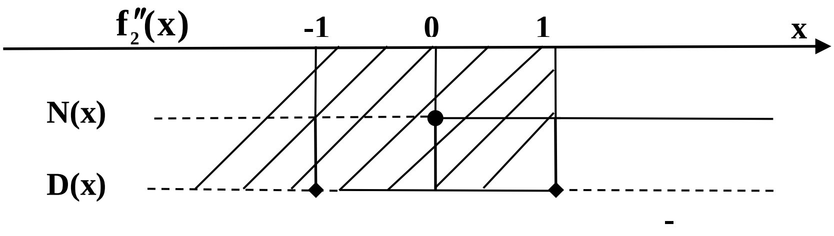
se ne deduce che $\mathbf{f_2'(x) < 0}$ in $\mathbf{]1;+\infty[}$, quindi la $\mathbf{f_2(x)}$ è decrescente dove è studiata.

7) **Concavità e convessità**:

Calcolando la derivata seconda della funzione $\mathbf{f_2(x)}$ si ha:

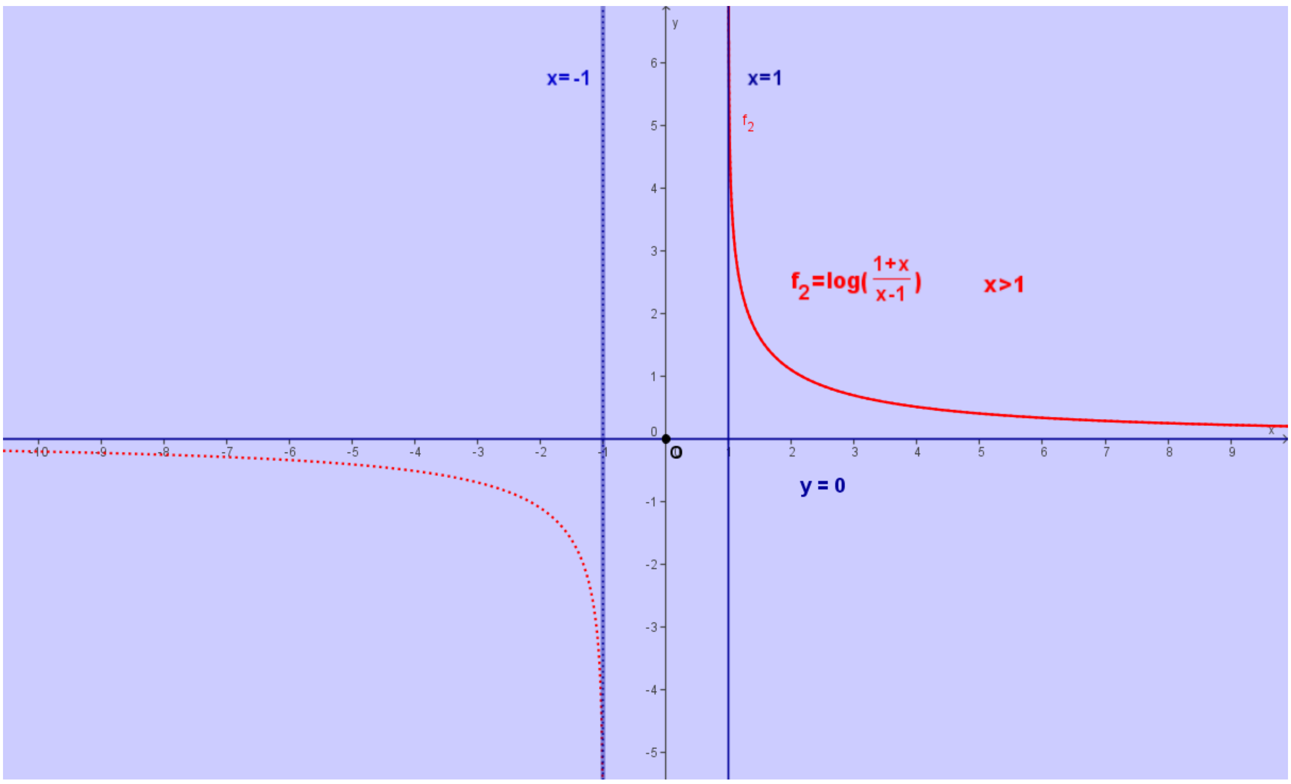
$$\mathbf{f_2''(x) = f_1''(x) = \frac{4x}{(1-x^2)^2}}\ .$$

Pertanto, si ottiene:

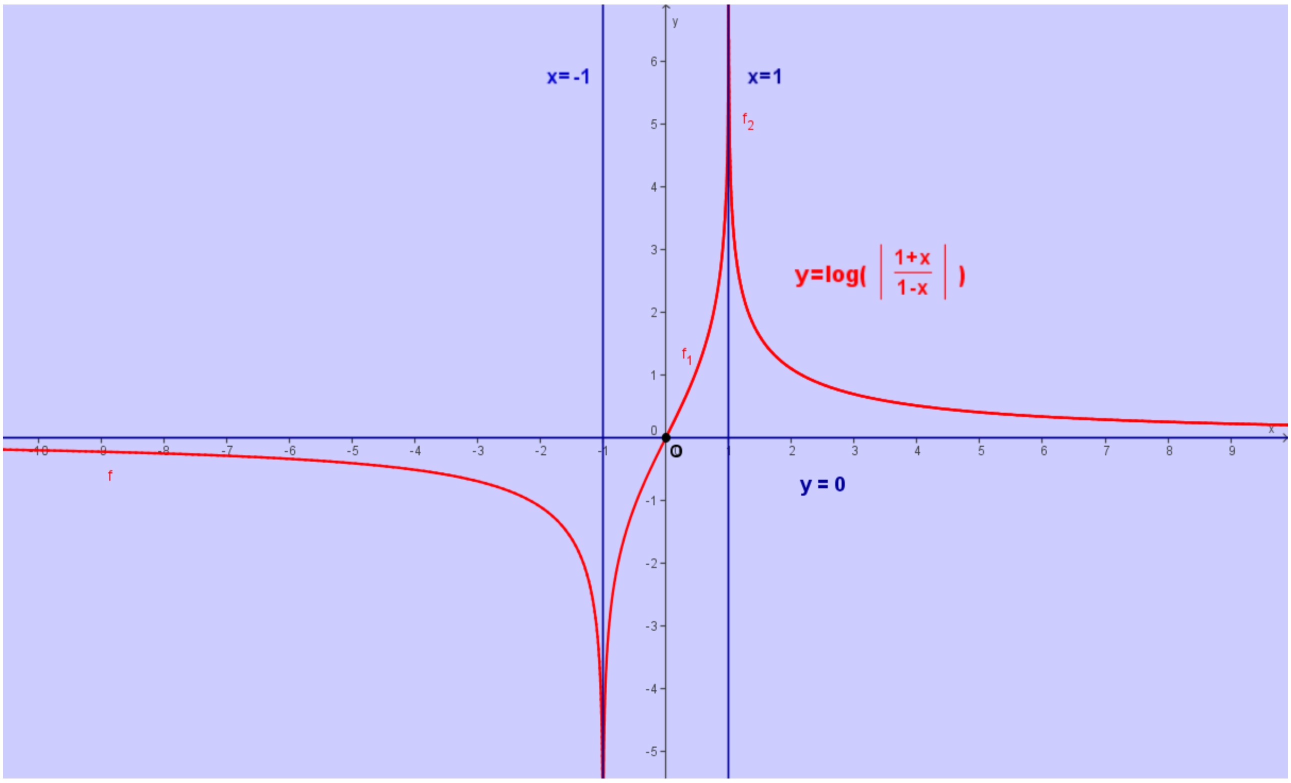


se ne deduce che $\mathbf{f_2''(x) < 0}$ in $\mathbf{]1;+\infty[}$, quindi la $\mathbf{f_2(x)}$ è concava verso il basso dove è studiata.

8) **Grafico della funzione** $\mathbf{f_2(x)}$ in $\mathbf{]1;+\infty[}$ (tratteggiato il grafico in $\mathbf{]-\infty;-1[}$) :



OSSERVAZIONI FINALI: Il grafico della funzione $\mathbf{y = \ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right|}$ è dato dalla composizione dei due grafici, precedentemente costruiti, inoltre, l'origine degli assi cartesiani è un punto di flesso ascendente a tangente obliqua , pertanto, si ha



Torna su